Bayes-Lösungen bei sequentiellen Testproblemen mit vollständigen Bindungen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Gerhard Rothenberger
aus Altdorf bei Nürnberg

Marburg/Lahn 1978

Fotodruck Symon und Wagner OHG · 3550 Marburg · Biegenstraße 5

Bayes-Lösungen bei sequentiellen Testproblemen mit vollständigen Bindungen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Gerhard Rothenberger
aus Altdorf bei Nürnberg

Marburg/Lahn 1978

Fotodruck Symon und Wagner OHG · 3550 Marburg · Biegenstraße 5

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vom Fachbereich angenommen: 4.April 1978
Tag der mündlichen Prüfung: 5.Juni 1978

1. Berichterstatter: Prof. Dr. V. Mammitzsch
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. v. Weizsäcker

Inhaltsverzeichnis:

Einleitung 1

I) Einige Definitionen und allgemeine Bezeichnungen 5

II) Homogene stochastische Prozesse mit vollständigen Bindungen 7

III) Optimales Stoppen..... 15

IV) Optimales Stoppen eines Markovprozesses..... 28

V) Allgemeines Modell eines Sequenztests bei endlich vielen Hypothesen und diskreter Zeit 41

VI) Sequentielle Testprobleme mit quasi-vollständigen Bindungen..... 46

VII) Sequentielle Testprobleme mit vollständigen Bindungen 54

VIII) Unabhängige Wiederholungen und zeitlich homogene Markovprozesse..... 65

IX) Bedingter Sequenztest mit unabhängigen Wiederholungen..... 70

Literaturverzeichnis..... 81

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546006_0052

Einleitung

Ein Sequenztest ist ein mehrstufiges Entscheidungsverfahren, bei dem zunächst eine Beobachtung (erste Stufe) gemacht und anschließend entschieden wird, ob eine endgültige Entscheidung (Terminalentscheidung) getroffen oder eine weitere Beobachtung (zweite Stufe) durchgeführt werden soll. Im ersten Fall erleidet man aufgrund der Terminalentscheidung einen durch eine vorgegebene Schadensfunktion bestimmten Schaden, im letzteren Fall ist nach der zweiten Beobachtung wiederum entweder eine Terminalentscheidung zu fällen oder erneut zu beobachten, usw.

Steht man nun unter dem Zwang, sich bis zur k-ten Stufe endgültig entscheiden zu müssen, so spricht man von einem k-stufigen Test ($k \leq \infty$).
Im Fall $k=\infty$ könnte es jetzt passieren, daß man sich nie zu einer Terminalentscheidung durchringt. Dies wird dadurch verhindert, daß jede Beobachtung mit Kosten für den Beobachtenden verbunden sind, die den Beobachter finanziell ruinieren würden, wenn er zu keiner Terminalentscheidung gelangen würde.

Systematisch wurden Sequenztests erstmals von Wald ((18)) untersucht.

H. Richter hat in ((15)) das Modell eines Sequenztests verallgemeinert, indem er von konkreten Entscheidungsfunktionen abstrahiert und direkt mit den Schäden arbeitet, die der Beobachtende nach seiner Terminalentscheidung erleidet.

Unserer Arbeit liegt dieses Richter'sche Modell zugrunde, das im Lauf der Zeit von mehreren Autoren untersucht worden ist.

Zunächst hat H. Richter in ((15)) für den Fall endlich vieler Hypothesen und $k < \infty$ die Frage nach Bayeslösungen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen positiv beantwortet und ein Verfahren zur

Konstruktion von Bayeslösungen angegeben.
V. Mammitzsch hat diese Resultate in ((8)) auf den Fall $k=\infty$ und in ((10)) auf den Fall kontinuierlicher Tests verallgemeinern können.
Während in diesen Fällen stets die Anzahl der Hypothesen endlich war, hat K. Pilzweger in seiner Dissertation k-stufige ($k < \infty$) Sequenztests mit beliebig vielen Hypothesen behandelt. Schließlich hat dann J. Mühlbauer in seiner Dissertation kontinuierliche Sequenztests mit beliebig vielen Hypothesen untersucht.

Während also bisher das Richtermodell in immer allgemeinerem Zusammenhang behandelt wurde, geht die vorliegende Arbeit den Weg der Spezialisierung.

Ausgangspunkt ist die Arbeit von V. Mammitzsch in ((8)), also der unendlich-stufige Sequenztest mit endlich vielen Hypothesen. Im Hinblick auf mögliche Anwendungen untersucht diese Arbeit solche Sequenztests, bei denen die Konstruktion von Bayeslösungen eine besonders einfache und für die Berechnung durch eine Rechenmaschine besonders günstige Form annimmt.
Hierzu führen wir den Begriff eines Sequenztests mit (quasi-) vollständigen Bindungen ein, in Anlehnung an den Begriff eines stochastischen Prozesses mit vollständigen Bindungen, wie er u. a. in ((5)), ((6)) und ((13)) behandelt wird.
Wir definieren in Kapitel II) stochastische Prozesse mit vollständigen Bindungen etwas allgemeiner als in der angegebenen Literatur. Dabei stellt sich dieser Begriff als so allgemein heraus, daß es ziemlich schwierig ist, ein Beispiel für einen stochastischen Prozeß anzugeben, der kein Prozeß mit vollständigen Bindungen ist. Dieses Kapitel dient im wesentlichen der Motivierung für unsere spätere Wahl des Begriffes 'Sequentielles Testproblem (Sequenztest) mit quasi- vollständigen bzw. vollständigen Bindungen.'

Im dritten Kapitel geben wir einen kurzen Abriß der Theorie des optimalen Stoppens eine stochastischen Prozesses. Wir beweisen in diesem Zusammenhang einen Satz, der besagt, daß man stets von von der Beobachtung abhängige Kosten durch eine geeignete (vor der Beobachtung zu zahlende) 'Pauschale' ersetzen kann, ohne das optimale Stoppen zu ändern.
Im vierten Kapitel behandeln wir das optimale Stoppen eines Markovprozesses mit divergierenden Gesamtkosten und leiten eine einfache Iteration zur Berechnung der optimalen Stopzeit her.
Es wird dargelegt, welche Vereinfachung gegenüber dem optimalen Stoppen eines allgemeinen stochastischen Prozesses erreicht wurde.

Kapitel III) und IV) dienen der Bereitstellung der wichtigsten Hilfsmittel für unsere weiteren Untersuchungen.

Im fünften Kapitel führen wir das Modell eines Sequenztests aus ((8)) ein. Allerdings spezialisieren wir dieses Modell im weiteren leicht, um technische Schwierigkeiten zu vermeiden, die einen Hauptteil der Arbeit in ((8)) ausmachen, im Rahmen dieser Arbeit aber nur den Blick auf das wesentliche verstellen würden.
Die wichtigste Aussage dieses Kapitels ist die Zurückführung der Suche nach einer Bayeslösung auf das optimale Stoppen eines zum Sequenztest gehörigen stochastischen Prozesses.
Dieses Ergebnis steht bereits in ((8)), trotzdem leiten wir es erneut her, da es in unserem Zusammenhang eine besonders einfache und übersichtliche Form annimmt.

Im sechsten Kapitel führen wir den Begriff eines sequentiellen Testproblems mit quasi-vollständigen Bindungen ein und zeigen, daß in diesem Fall die Suche nach Bayeslösungen auf das optimale Stoppen eines Markovprozesses mit divergierenden Gesamtkosten zurückgeführt werden kann. Die hierin liegende Vereinfachung des optimalen Stoppens ist der wesentliche Unterschied unseres Modells gegenüber dem allgemeinen Modell.

Im siebenten Kapitel spezialisieren wir weiter zu sequentiellen Testproblemen mit vollständigen Bindungen. Bei diesen Tests erweist sich die a-posteriori-Verteilung als ein kanonischer Parameter für das optimale Stoppen (wenn auch i. a. nicht der einzige).

Im achten Kapitel übertragen wir unsere Ergebnisse auf den Fall, daß die Hypothesen Produktmaße oder die Verteilungen von zeitlich homogenen Markovprozessen sind. Wir reproduzieren mit unseren Mitteln einige Ergebnisse aus der Diplomarbeit von Rhiel ((14)) bzw. der klassischen sequentiellen Testtheorie von Wald ((18)).

Im neunten Kapitel diskutieren wir schließlich sogenannte bedingte Sequenztests mit unabhängigen Wiederholungen als ein Beispiel für ein sequentielles Entscheidungsproblem mit vollständigen Bindungen, welches nicht zu den im achten Kapitel behandelten gehört.

Herrn Prof. Dr. Mammitzsch danke ich für seine Betreuung, sowie Herrn Prof. Dr. v.Weizsäcker und Herrn Dr. Mühlbauer für verschiedene Anregungen und Gespräche.

I) Einige Definitionen und allgemeine Bezeichnungen:

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$A \times B$	Kartesisches Produkt der Mengen A und B.
A^n , $A^{\mathbb{N}}$	$A \times A \ldots \times A$ (n-mal, $n \in \mathbb{N}$) bzw. $A \times A \ldots$
$pr_i : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow A$	Projektion auf die i-te Koordinate, $i \in \mathbb{N}$.
$pr_{i_1, \ldots, i_n}$	Projektion auf die Koordinaten $i_1, \ldots, i_n$.
$\lvert A \rvert$	Mächtigkeit der Menge A.
A^c	Komplement von A.
x^t	Transponierte eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.
$\mathcal{L}(Y)$	Borelsigmaalgebra eines top. Raumes Y.
$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}(\mathbb{R})$
$\mathcal{L}^{\mathbb{N}}$	$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$
λ	Lebesgue-Maß auf $\mathcal{L}_1$.
λ^*	äußeres Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.
λ_*	inneres Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.
$\mathbb{E}(x)$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen x.

Es sei $(X, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y, \mathcal{M})$ ein Meßraum. $y_1, \ldots, y_k : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{M})$ seien zufällige Größen.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$	Sigmaalgebren-Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{M}$.
$B(y_1, \ldots, y_k)$	Die von den $y_1, \ldots, y_k$ erzeugte Sigmaalgebra.
$P_{y_k}(\cdot \mid y_1, \ldots, y_{k-1})$	Bedingte Verteilung von y_k unter der Bedingung $B(y_1, \ldots, y_{k-1})$.

$\mathcal{Y}^0$ $\quad\quad$ $\{\emptyset\ ,\ Y^{\mathbb{N}}\}$

$\mathcal{Y}^k$ $\quad\quad$ $B_{(pr_1,\ldots,pr_k)}\ ,\ pr_i\colon Y^{\mathbb{N}} \longrightarrow Y,\ i \in \mathbb{N}.$

Wir unterscheiden nicht zwischen meßbaren Funktionen

$u : (Y^k\ ,\ \overbrace{\mathcal{Y}\otimes\ldots\otimes\mathcal{Y}}^{k}) \longrightarrow (X, \mathfrak{X})$ und meßbaren Funktionen

$u^* : (Y^{\mathbb{N}}\ ,\ \mathcal{Y}^k) \longrightarrow (X, \mathfrak{X})$, um die Schreibweise zu erleichtern.

Werden skalare Größen $g_i\ , i=1,\ldots,n$ eingeführt, so bezeichne

g (ohne Index) den Spaltenvektor $(g_1,\ldots,g_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

II) Homogene stochastische Prozesse mit vollständigen Bindungen.

In der Biologie und Psychologie, besonders aber in der Lerntheorie, reicht das Modell eines Markovprozesses im allgemeinen nicht aus, um auftretende stochastische Prozesse zu beschreiben.
Denken wir z. B. an das folgende Lernexperiment:
Ein Fisch befindet sich in einem Aquarium, das eine beleuchtete und eine unbeleuchtete Hälfte besitzt. Der Fisch möge von Natur aus die Anlage besitzen, sich im Dunkeln aufzuhalten. Er wird deshalb die beleuchtete Hälfte meiden.
Durch Stromstöße im unbeleuchteten Teil des Aquariums soll nun der Fisch dazu gebracht werden, den beleuchteten Teil aufzusuchen und den unbeleuchteten zu meiden. Die Zufallsvariable $X_k \in \{0,1\}$ zeige an, ob der Fisch sich zum Zeitpunkt k (d.h. beim k-ten Stromstoß) in der unbeleuchteten Hälfte des Aquariums aufhält ($X_k = 1$) oder nicht ($X_k = 0$).
Der Fisch wird bei mehrmaligem Erfahren von Stromstößen 'hinzulernen' und die dunkle Hälfte meiden. Wir fassen diesen Lernvorgang auf als 'Wahl' einer bedingten Verteilung von X_{k+1} unter der Bedingung $X_1,\ldots,X_k$ ($k \in \mathbb{N}$).
Nun ist einerseits $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kein Markovprozeß (ein solcher zeichnet sich ja gerade dadurch aus, daß nichts hinzugelernt wird), noch kann die bedingte Verteilung von X_{k+1} unter der Bedingung der Vergangenheit $X_1,\ldots,X_k$ explizit von $(X_1,\ldots,X_k)$ abhängen, denn dies würde bedeuten, daß der Fisch sich die Vergangenheit, d.h. den Vektor $(X_1,\ldots,X_k)$ fotografisch merkt.
Vielmehr interpretieren wir die bedingte Verteilung von X_{k+1} unter der Bedingung $X_1,\ldots,X_k$ als Funktion eines bestimmten Zustands z_k des Gehirns des Fisches, der sich (sukzessive) aufgrund der 'Erfahrung' der $X_1,\ldots,X_k$ eingestellt hat, d.h.:

$$P_{X_{k+1}}(\cdot \mid X_1,\ldots,X_k) = P_{X_{k+1}}(\cdot \mid z_k(X_1,\ldots,X_k)) .$$

Das Gehirn verarbeitet nun eine weitere Erfahrung X_{k+1} und verändert in spezifischer Weise den Zustand z_k unter dem Einfluß von X_{k+1} in den Zustand z_{k+1}, d.h.: $z_{k+1}(X_1,\dots,X_{k+1})$ ist eine Funktion des vorhergehenden Zustands $z_k(X_1,\dots,X_k)$ und X_{k+1}.
Schließlich wollen wir dem Gehirn des Fisches noch eine gewisse Trägheit zugestehen, d.h. eine Totzeit, bis es anfängt, auf die Stromstöße zu reagieren und Zustände z_k auszubilden. Das oben beschriebene Modell soll also erst ab einem $k_o \in \mathbb{N}$ zutreffen.
Damit ist die Struktur eines stochastischen Prozesses mit vollständigen Bindungen dargelegt, wie er im folgenden definiert wird.

Die Definition eines stochastischen Prozesses mit vollständigen Bindungen stammt von M. Iosifescu aus dem Jahr 1963, siehe ((5)).
Eine eingehende Erörterung dieser Prozesse und ihre Anwendung auf die Lerntheorie findet man in dem Buch 'Random processes and Learning' von M. Iosifescu und R. Theodorescu ((6)), sowie in der Dissertation von H. Pruscha ((13)).

(2.1) Definition

Es sei $(Y, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Ein Y-wertiger stochastischer Prozeß $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt '(homogener) stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen (z_k)' , wenn ein Meßraum $(Z, \mathcal{Z})$, eine 'Übergangsfunktion' $U: (Z\times Y, \mathcal{Z}\otimes\mathcal{M}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$ und eine 'Startfunktion' $z_{k_o}: (Y^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}^{k_o}) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$, $(k_o \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ existieren, derart, daß für die Folge $z_k: (Y^{\mathbb{N}}, \mathcal{M}^k) \longrightarrow (Z, \mathcal{Z})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $k \geq k_o$, gemäß $z_{k+1} := U(z_k(\underline{y}), y_{k+1})$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots) \in Y^{\mathbb{N}}$, $k \geq k_o$ gilt:
Es gibt eine Übergangswahrscheinlichkeit $Q: Z \times \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$, so daß
$P_{\xi_{k+1}}(\cdot \mid \xi_1,\dots,\xi_k) = Q(z_k(\xi_1,\dots,\xi_k), \cdot)$ für $k \geq k_o$.
Im Fall $k_o = 0$ gelte noch: $P(\xi_1 \in A) = Q(z_o, A)$, für alle $A \in \mathcal{M}$.
(In der angegebenen Literatur wird im Unterschied zu unserer Definition stets $k_o = 0$ gefordert).

Man kann sich die Struktur eines stochastischen Prozesses (ξ_k) mit vollständigen Bindungen (z_k) so veranschaulichen: (ξ_k) wird 'begleitet' von dem Prozeß (ζ_k) mit $\zeta_k := z_k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, wobei ζ_k die Verteilung für das zukünftige Ergebnis ξ_{k+1} bestimmt.
(ζ_k) ist stets ein Markovprozeß, wie der folgende Satz zeigt:

(2.2) Satz

Sei $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k \geq k_o}$. Sei $\zeta_k := z_k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ für $k \geq k_o$.
Dann ist $(\zeta_k)_{k \geq k_o}$ ein zeitlich homogener Markovprozeß über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum Z, sowie der Übergangswahrscheinlichkeit $\tilde{Q}(z, A) := Q(z, U(z, \cdot)^{-1}(A))$, $z \in Z$, $A \in \mathfrak{Z}$.

Beweis: Siehe ((6)), Seite 66, Prop. 2.1.4.

(2.3) Bemerkung

$(\zeta_k)_{k \geq k_o}$ heißt der zu dem stochastischen Prozeß (ξ_k) mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k \geq k_o}$ assoziierte Markovprozeß.

Bekanntlich kann man einem beliebigen stochastischen Prozeß $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit Zustandsraum $\mathbb{X}$ einen Markovprozeß zuordnen, indem man zu dem neuen Prozeß $(\tilde{X}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, mit $\tilde{X}_k := (X_1, \ldots, X_k)$, $k \in \mathbb{N}$, mit dem erweiterten Zustandsraum $\tilde{\mathbb{X}} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{X}^k$ übergeht.

Mit einer ähnlichen Idee beweist man nun den folgenden Satz:

(2.4) Satz

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, Y polnisch und $\mathcal{Y} := \mathcal{B}(Y)$. Dann ist jeder stochastische Prozeß $\xi_k : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$, $k \in \mathbb{N}$, ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen.

Beweis: Siehe ((13)), Seite 8, Satz 1.5.

(2.5) Bemerkung

Unter den Voraussetzungen von Satz (2.4) läßt sich der Zustandsraum des zu (ξ_k) assoziierten Markovprozesses $(\zeta_k)_{k \geq k_o}$ sogar stets als $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ wählen, denn:

Der von H. Pruscha im Beweis von Satz (2.4) verwendete Zustandsraum Z ist definiert gemäß $Z := \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y^k} + \{y_o\}$, mit $y_o \in Y$ beliebig.

Da Y polnisch ist, ist Y^k polnisch in der Produkttopologie ($k \in \mathbb{N}$) und damit auch Z in der Summentopologie. Außerdem ist $\mathcal{Z} := \mathcal{B}(Z)$.

Da Z polnisch ist, ist Z entweder höchstens abzählbar oder $|Z| = |\mathbb{R}|$ (siehe ((7)), Seite 479, Th. 0). Wähle $\tilde{Z} \subset \mathbb{R}$ polnisch mit $|\tilde{Z}| = |Z|$.

Nach Kuratowski ((7)), Seite 450, 451 sind zwei polnische Räume genau dann Borelisomorph, wenn sie die gleiche Mächtigkeit haben.

Mithin existiert ein Borelisomorphismus $\phi : (\tilde{Z}, \mathcal{B}(\tilde{Z})) \longrightarrow (Z, \mathcal{B}(Z))$.

Wir definieren nun: (für U, z_0, Q gem. Def. (2.1) bezüglich Z)

1) $\tilde{U}: \tilde{Z} \times Y \longrightarrow \tilde{Z}$, gemäß $\tilde{U}(\tilde{z}, y) := \phi^{-1}(U(\phi(\tilde{z}), y)$, $\tilde{z} \in \tilde{Z}, y \in Y$.

2) $z_0 := \phi^{-1}(z_0) \in \tilde{Z}$. (in (2.4) ist $k_o = 0$).

3) $\tilde{Q} := \tilde{Z} \times \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$ gemäß $\tilde{Q}(\tilde{z}, A) := Q(\phi(\tilde{z}), A)$, $\tilde{z} \in \tilde{Z}, A \in \mathcal{M}$.

Dann ist $\tilde{Q}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit und es gilt:

$\tilde{z}_k = \phi^{-1}(z_k)$, für $k \in \mathbb{N}$, und

$P_{\xi_{k+1}}(A \mid \xi_1, \ldots, \xi_k) = Q(z_k(\xi_1, \ldots, \xi_k), A) = \tilde{Q}(\tilde{z}_k(\xi_1, \ldots, \xi_k), A)$,

(für $A \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$).

Also ist (ξ_k) ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen $\tilde{z}_k = \phi^{-1}(z_k)$.

Obwohl also ein stochastischer Prozeß (ξ_k) mit Werten in einem polnischen Raum stets ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen ist, ist eine eigenständige Theorie der stochastischen Prozesse mit vollständigen Bindungen nicht sinnlos. Je nach der Struktur der Übergangsfunktion U und den vollständigen Bindungen (z_k) führt sie zu einem tieferen Verständnis des Übergangsverhaltens eines stochastischen Prozesses. Die Suche nach geeigneten vollständigen Bindungen (z_k) regt

bei einem gegebenen stochastischen Prozeß zu Modellbildungen für die Art der Abhängigkeit zukünftiger Ereignisse von der Vergangenheit an, die man möglicherweise nicht entdecken würde, wenn man in dem allgemeinen Konzept eines stochastischen Prozesses verhaftet bliebe. Die vollständigen Bindungen (z_k) repräsentieren in diesem Sinne ein gewisses a-priori oder theoretisches Wissen über den gegebenen stoch. Prozeß. Man denke etwa an das Beispiel mit dem Fisch.

(2.6) Bemerkung

Es gibt allerdings, wenn man beliebige Zustandsräume $(Y, \mathcal{U})$ zuläßt, stochastische Prozesse, welche keine Prozesse mit vollständigen Bindungen sind.

In ((12)), Seite 35, konstruieren J. Pfanzagl und W. Pierlo eine Sigmaalgebra $\mathcal{U}^*$ über $[0,1]$, welche $\mathcal{B}([0,1])$ umfaßt und eine $\mathcal{U}^*$-meßbare Zufallsvariable, die keine bedingte Verteilung unter der Bedingung $\mathcal{B}([0,1])$ besitzt. In Anlehnung hieran konstruieren wir nun das folgende Gegenbeispiel:

Sei $X := [0,1]$, $\mathcal{U}_0 := \mathcal{B}(X)$.

Es existieren abzählbar viele $M_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$, mit $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$,

$X = \sum_{i \in \mathbb{N}} M_i$ und $\lambda_*(M_i) = 0$ und $\lambda^*(M_i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(Siehe ((1)), Seite 41).

Wir definieren: $\mathcal{U}_k := {}^{B}(\mathcal{U}_{k-1}, M_k)$, $k \geq 1$; $\mathcal{U}_\infty := {}^{B}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_k)$.

Wie man leicht sieht, gilt dann die Darstellung:

i) $\mathcal{U}_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} B_i M_i + B_0 \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i \right) : B_0, B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{U}_0 \right\}$

ii) $\mathcal{U}_\infty = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} B_i M_i : B_i \in \mathcal{U}_0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}$.

Da M_i das äußere Lebesgue-Maß 1 hat, kann man $\lambda | \mathcal{U}_0$ in eindeutiger Weise auf $M_i \cap \mathcal{U}_0$ einschränken. Mithin ist durch

$P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i M_i) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \lambda(B_i)$, $B_i \in \mathcal{U}_o$, $i \in \mathbb{N}$.

in eindeutiger Weise ein W-maß P auf $\mathcal{U}_\infty$ definiert.

Sei nun $Y := X^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M} := \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_3 \otimes \ldots$ und

$\xi_k : (X, \mathcal{U}_\infty) \longrightarrow (Y, \mathcal{M})$, $\xi_k(x) := (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow}{x}, 0, \ldots) \in Y$, $x \in X$.

k-te Stelle, $k \in \mathbb{N}$.

Für den hiermit definierten Y-wertigen stochastischen Prozeß $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt offensichtlich:

$B(\xi_1, \ldots, \xi_k) = B(\xi_k) = \mathcal{U}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Es existiert keine bedingte Verteilung von ξ_{k+1} unter der Bedingung $\mathcal{U}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Wir nehmen an, es existiert eine Übergangswahrscheinlichkeit

$Q^* : X \times \mathcal{M} \longrightarrow [0,1]$ mit $Q^*(x, D) = P_{\xi_{k+1}}(D \mid \mathcal{U}_k)(x)$ P-f. s. $(D \in \mathcal{M})$.

Setze: $Q(x, A) := Q^*(x, Xx \ldots \underset{\uparrow}{x}XxAxXx \ldots)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{U}_{k+1}$.

k-te Stelle

Dann ist $Q : X \times \mathcal{U}_{k+1} \longrightarrow [0,1]$ eine Übergangswahrscheinlichkeit mit $P(A_k \cap A) = \int_{A_k} Q(x, A)\, P(dx)$, $A_k \in \mathcal{U}_k$, $A \in \mathcal{U}_{k+1}$.

Behauptung 1: Es existiert eine P-Nullmenge $N_o \in \mathcal{U}_k$, so daß für alle $x \in (N_o)^c$ gilt: $Q(x, A_k) = 1_{A_k}(x)$ für alle $A_k \in \mathcal{U}_k$.

Beweis: Für jedes $A_k \in \mathcal{U}_k$ ist $Q(\cdot, A_k)$ eine Version von 1_{A_k}.

$\mathcal{U}_k$ ist separabel; man wähle eine abzählbare Algebra $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}_k$, welche $\mathcal{U}_k$ erzeugt. Dann existiert eine P-Nullmenge $N_o \in \mathcal{U}_k$ mit $Q(x, D) = 1_D(x)$, für $D \in \mathcal{D}$, $x \in (N_o)^c$.

Für ein $x \in (N_o)^c$ sind somit $Q(x, \cdot\,)$ und $1_\cdot(x)$ W-Maße auf $\mathfrak{A}_k$, welche auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}_k$ übereinstimmen. Nach einem bekannten Maßfortsetzungssatz stimmen die beiden W-Maße dann auf ganz $\mathfrak{A}_k$ überein. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2: $Q(\cdot\,, M_{k+1}) = 2^{-1}\, 1_{(\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i)}$ $P \mid \mathfrak{A}_k$-f. s.

Beweis:

Sei $A_k = \sum_{i=1}^{k} B_i M_i + B_o(\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i) \in \mathfrak{A}_k$, $B_o, \ldots, B_k \in \mathfrak{A}_o$.

Dann gilt:

$$P(A_k \cap M_{k+1}) = P(B_o \cap M_{k+1}) = 2^{-(k+1)} \lambda(B_o).$$

Andererseits gilt:

$$\int_{A_k} 2^{-1}\, 1_{(\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i)}(x)\, P(dx) = 2^{-1}\, P(A_k \cap (\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i)) =$$

$$= 2^{-1}\, P(B_o \cap (\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i)) = 2^{-1} \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} \lambda(B_o) =$$

$$= 2^{-(k+1)} \lambda(B_o).$$

Da $2^{-1}\, 1_{(\sum_{i=k+1}^{\infty} M_i)}$ $\mathfrak{A}_k$-meßbar ist, ist Beh. 2 bewiesen.

Somit existiert eine P-Nullmenge $N_1 \in \mathfrak{A}_k$ mit $N_o \subset N_1$, so daß für alle $x \in L := \sum_{i=k+1}^{\infty} M_i \setminus N_1$ gilt:

$Q(x, M_{k+1}) = 2^{-1}$.

Weiter gilt nach Beh. 1 für alle $x \notin N_1$: $Q(x, \{x\}) = 1$, da $\{x\} \in \mathfrak{A}_k$.

Also gilt für alle $x \in L_1 := M_{k+1} \setminus N_1 \subset L$:

$1 = Q(x, \{x\}) \leq Q(x, M_{k+1}) = 1/2$.

Dies ist ein Widerspruch, denn $P(L_1) = 2^{-(k+1)} > 0$; mithin ist L_1 nicht leer. Damit ist Bemerkung (2.6) bewiesen.

(2.7) : Einfache Beispiele für die Konstruktion des assoziierten Markovprozesses zu Prozessen mit vollst. Bindungen:

1) Zeitlich homogener Markovprozeß:

Man macht sich sofort klar, daß man bei einem zeitlich homogenen Markovprozeß (ξ_k) den assoziierten Markovprozeß $(\zeta_k) = (\xi_k)$ wählen kann. Die Definition von U, Z usw. ist offensichtlich.

2) Urnenmodell:

Eine Urne enthalte am Anfang $a_j^{(0)}$ Kugeln der Farbe j ($j = -1, +1$). Zum Zeitpunkt $k \geq 1$ enthalte sie $a_j^{(k)}$ Kugeln der Farbe j. Wird nun zum Zeitpunkt k eine Kugel der Farbe j gezogen, so wird sie durch eine Kugel der anderen Farbe ersetzt.
In diesem Fall gilt also: $N := a_{-1}^{(0)} + a_{+1}^{(0)} = a_{-1}^{(k)} + a_{+1}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Die Zufallsvariable ξ_k beschreibe das Ziehen einer Kugel zum Zeitpunkt k. Mithin:

$(Y, \mathcal{U}) = (\{-1,+1\}, \mathcal{P}(\{-1,+1\}))$; $(Z, \mathcal{Z}) = (\{0,\dots,N\}, \mathcal{P}(Z))$.
Setzen wir $z_0 := a_{-1}^{(0)}$ und $U(z,j) := \max(\min(z+j, N), 0)$, $z \in Z$, $j = \pm 1$.

Dann ist $z_k(j_1,\dots,j_k)$ die Anzahl der Kugeln der Farbe $j=-1$, nachdem $\xi_1 = j_1, \dots, \xi_k = j_k$ gezogen wurde. Weiter gilt:
$P(\xi_{k+1} = -1 \mid \xi_1 = j_1, \dots, \xi_k = j_k) = \frac{z_k(j_1,\dots,j_k)}{N} = Q(z_k, \{-1\})$
mit der Übergangswahrscheinlichkeit $Q: Z \times \mathcal{P}(\{-1,+1\}) \longrightarrow [0,1]$,
$Q(z, \{-1\}) := \frac{z}{N}$.

Mithin ist (ξ_k) ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen (z_k). Der assoziierte Markovprozeß (ζ_k) gibt die Anzahl der Kugeln der Farbe $j = -1$ nach k Ziehungen an.

3) Unabhängige Wiederholungen, die einer Bedingung unterliegen:

Es sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Sei ζ_0 eine positive Konstante und $\zeta_{k+1} := U(\zeta_k, X_{k+1}) := \zeta_k + X_{k+1}$. Der stochastische Prozeß $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$

sei dann definiert durch: $\xi_{k+1} := X_{k+1}\, 1_{\{\zeta_k \geq 0\}}$, $k=0,1,2,\ldots$

Man macht sich nun leicht klar, daß (ξ_k) ein stochastischer Prozeß mit vollständigen Bindungen mit dem assoziierten Markovprozeß (ζ_k) ist, denn

$$P_{\xi_{k+1}}(A \mid \xi_1, \ldots, \xi_k) = P(X_1 \in A)\, 1_{\{\zeta_k \geq 0\}} + 1_A(0)\, 1_{\{\zeta_k < 0\}}, A \in \mathcal{B}_1.$$

Prozesse dieser Art werden wir ausführlicher im letzten Kapitel behandeln.

III) Optimales Stoppen

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in die Theorie des optimalen Stoppens eines stochastischen Prozesses gegeben werden. Für eine eingehendere Erörterung dieses Themas sei insbesondere auf die Arbeiten von Y. S. Chow und H. Robbins ((2)) und M. Thompson ((17)), sowie auf das Buch von A. Širjaev ((16)) verwiesen. Wir behandeln allerdings nur stochastische Prozesse mit abzählbarer Zeit.

Voraussetzungen:

Gegeben sei ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine aufsteigende Folge $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}$ von Unter-Sigma-Algebren von $\mathcal{A}$ und eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von P-integrablen reellen Zufallsvariablen, wobei x_k $\mathcal{A}_k$-meßbar sei.
Weiter gelte $\mathbb{E}(\sup\{x_k^- : k \in \mathbb{N}\}) < \infty$, d.h. der Prozeß (x_k) sei gleichmäßig integrierbar nach unten beschränkt.

(3.1) Definition:

a) Eine Stopzeit T der Familie $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $T: \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, mit $\{T \leq k\} \in \mathcal{A}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Eine Stopzeit T mit $P(T=\infty) = 0$ heiße 'zulässig' . (Hiermit sei ausgedrückt, daß wir eben andere Stopzeiten nicht zulassen wollen, weil ein unendlich oftmaliges Beobachten praktisch nicht sinnvoll ist).

Bezeichnungen:

Sei $k, N \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq N$.

$\gamma_k^N := \{ T: \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} :$ T ist zulässige stopzeit der Familie $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $P(\{k \leq T \leq N\}) = 1 \}$.

$T \in \gamma_1^N$ heißt '(höchstens) N-stufige Stopzeit' , $(N < \infty)$.

$T \in \gamma_k^\infty$ heißt 'mindestens k-stufige Stopzeit' .

Das Problem des optimalen Stoppens des (endlichen oder unendlichen) Prozesses $x_k, \ldots, x_N$ besteht nun darin, eine Stopzeit $T_o \in \gamma_k^N$ zu finden, für die $\mathbb{E}(x_{T_o}) = \inf \{ \mathbb{E}(x_T): T \in \gamma_k^N \}$ gilt.

(3.2) Bemerkung:

1) Sei $T \in \gamma_k^N$, dann gilt: $x_T = x_T^+ + x_T^- \geq x_T^+ - \sup\{x_k^-: k \in \mathbb{N}\}$.

Weiter gilt nach Voraussetzung: $\mathbb{E}(\sup\{x_k^-: k \in \mathbb{N}\}) < \infty$.

Mithin ist für jede zulässige Stopzeit T der gestoppte Prozeß x_T eigentlich oder uneigentlich P-integrierbar.

2) Eine Stopzeit $T_o \in \gamma_k^N$, welche $\mathbb{E}(x_{T_o}) = \inf\{\mathbb{E}(x_T): T \in \gamma_k^N\}$ erfüllt, heißt (eine) optimale Stopzeit (des Prozesses $x_k, \ldots, x_N$ bzgl. $(\mathcal{A}_k)$).

(3.3) Bemerkung:

Im Hinblick auf statistische Fragestellungen wollen wir den Erwartungswert eines gestoppten Prozesses minimieren. Die Beziehung zur angegebenen Literatur - dort wird stets der Erwartungswert maximiert - ergibt sich durch Übergang zum negativen Prozeß $(-x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Wir wollen zunächst den folgenden 'Absteigesatz' beweisen, den man als Verallgemeinerung der Methode der 'backward induction' zur Bestimmung einer optimalen Stopzeit T_o des Prozesses $x_1, \ldots, x_N$ mit $N < \infty$ betrachten kann, wie der übernächste Satz zeigen wird. (Außerdem ist die 'Idee', die hinter dem Absteigesatz steht natürlich die gleiche wie diejenige, die der Methode der backward induction zugrunde liegt).

(3.4) Satz: (Absteigesatz)

Es sei $1 \leq k \leq N \leq \infty$, $k, N \in \mathbb{N}$.

Es sei $T_k^N \in \mathcal{T}_k^N$ eine optimale Stopzeit des Prozesses $x_k, \ldots, x_N$ für $N < \infty$, bzw. $x_k, x_{k+1}, \ldots$ für $N = \infty$. Dann ist

$$T_{k-1}^N := \begin{cases} k-1, & \text{falls } x_{k-1} \leq \mathbb{E}(x_{T_k^N} | \mathfrak{A}_{k-1}) \\ T_k^N & \text{sonst} \end{cases}$$

eine optimale Stopzeit des Prozesses $x_{k-1}, x_k, \ldots, x_N$ $(N < \infty)$ bzw. $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots$ $(N = \infty)$.

(3.4*) Bemerkung:

Mit Hilfe des Absteigesatzes erhält man durch sukzessives Absteigen im Fall $N < \infty$ optimale Stopzeiten des Prozesses $x_j, \ldots, x_N$ für alle $1 \leq j \leq N$, indem man von dem 'Prozeß' x_N mit der trivialerweise optimalen Stopzeit $T_N^N \equiv N$ ausgeht (siehe Satz (3.6)).

Darüber hinaus liefert aber der Absteigesatz auch im Fall $N = \infty$ optimale Stopzeiten für den stochastischen Prozeß $x_j, x_{j+1}, \ldots (j \in \mathbb{N})$, wenn nur eine optimale Stopzeit für den Prozeß $x_k, x_{k+1}, \ldots$ für ein $k \geq j$ bekannt ist.

Beweis von Satz (3.4):

1) T_{k-1}^N ist offensichtlich eine Stopzeit aus $\mathcal{T}_{k-1}^N$.

2) Beh.: $\mathbb{E}(x_{T_k^N} | \mathfrak{A}_{k-1}) \leq \mathbb{E}(x_T | \mathfrak{A}_{k-1})$ auf $\{T \geq k\}$ P-f.s. für alle $T \in \mathcal{T}_{k-1}^N$.

Bew.: Annahme: Es existiere $T \in \mathcal{T}_{k-1}^N$ und eine Menge $F \in \mathcal{A}_{k-1}$, $F \subset \{T \geq k\}$ mit $P(F) > 0$ und $\mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathcal{A}_{k-1}) > \mathbb{E}(x_T \mid \mathcal{A}_{k-1})$ auf F.

Setze: $$\tilde{T}_k^N := \begin{cases} T_k^N & \text{auf } F^c \\ T & \text{auf } F \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{T}_k^N \in \mathcal{T}_k^N$, denn es gilt:

$$\{\tilde{T}_k^N = j\} = (\underbrace{\{T = j\} \cap F}_{\in \mathcal{A}_j}) + (\underbrace{\{T_k^N = j\} \cap F^c}_{\in \mathcal{A}_j}) \in \mathcal{A}_j, \quad j \geq k.$$

Somit gilt:

$$\mathbb{E}(x_{\tilde{T}_k^N}) = \int_F x_T \, dP + \int_{F^c} x_{T_k^N} \, dP < \int_F x_{T_k^N} \, dP + \int_{F^c} x_{T_k^N} dP =$$

$$= \mathbb{E}(x_{T_k^N}).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß T_k^N optimal ist.

3) Setze $$T' := \begin{cases} k-1 & \text{auf } \{T = k-1\}. \\ T_k^N & \text{auf } \{T \geq k\}. \end{cases} \qquad (T \in \mathcal{T}_{k-1}^N).$$

Nach Teil 2) gilt dann: $\mathbb{E}(x_{T'}) \leq \mathbb{E}(x_T)$.

4) Setzen wir zur Abkürzung $G_1 := \{x_{k-1} \leq \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathcal{A}_{k-1}) \in \mathcal{A}_{k-1}$

und $G_2 := \{x_{k-1} > \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathcal{A}_{k-1}) \in \mathcal{A}_{k-1}$.

Dann hat man:

a) Auf $G_1 \cap \{T = k-1\}$ und $G_2 \cap \{T \geq k\}$ gilt $x_{T_{k-1}^N} = x_{T'}$ P-f.s.

b) $$\int_{G_1 \cap \{T \geq k\}} x_{T_{k-1}^N} \, dP \underset{\text{(Def. von } T_{k-1}^N)}{=} \int_{G_1 \cap \{T \geq k\}} x_{k-1} \, dP$$

$$\underset{\text{(Def. von } G_1)}{\leq} \int_{G_1 \cap \{T \geq k\}} \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathcal{A}_{k-1}) \, dP = \int_{G_1 \cap \{T \geq k\}} x_{T_k^N} \, dP =$$

$$\underset{\text{(Def. von } T')}{=} \int_{G_1 \cap \{T \geq k\}} x_{T'} \, dP.$$

c) $\int\limits_{G_2 \cap \{T=k-1\}} x_{T^N_{k-1}} \, dP \underset{\text{(Def. v. } T^N_{k-1})}{=} \int\limits_{G_2 \cap \{T=k-1\}} x_{T^N_k} \, dP =$

$= \int\limits_{G_2 \cap \{T=k-1\}} \mathbb{E}(x_{T^N_k} \mid \mathfrak{A}_{k-1}) \, dP \underset{\text{(Def. v. } G_2)}{\leq} \int\limits_{G_2 \cap \{T=k-1\}} x_{k-1} \, dP =$

$= \int\limits_{G_2 \cap \{T=k-1\}} x_{T'} \, dP \; .$

Insgesamt folgt somit: $\mathbb{E}(x_{T^N_{k-1}}) \leq \mathbb{E}(x_{T'}) \leq \mathbb{E}(x_T)$ für alle $T \in \mathcal{T}^N_{k-1}$.
Also ist T^N_{k-1} eine optimale Stopzeit für $x_{k-1}, x_k, \ldots, x_N$ $(N \leq \infty)$.

Mit Hilfe dieses Satzes leiten wir nun die Formel her für die optimale Stopzeit eines endlichen Prozesses mit Hilfe der 'backward induction'. (Siehe ((2)), Seite 37, 38). Wir beweisen den folgenden Satz deshalb, um die strukturelle Verwandtschaft des Absteigesatzes mit der Methode der backward induction herauszustellen.

(3.5) Satz: (Methode der 'backward induction').
Sei $N < \infty$. Sei $\beta^N_{N+1} := \infty$; $\beta^N_j := \min(x_j, \mathbb{E}(\beta^N_{j+1} \mid \mathfrak{A}_j))$ für $1 \leq j \leq N$. Dann ist eine optimale Stopzeit T^N_k von $x_k, \ldots, x_N$ gegeben durch:

$$T^N_k := \min\{j: 1 \leq j \leq N, \; x_j = \beta^N_j\}$$

und es gilt: $\mathbb{E}(x_{T^N_k} \mid \mathfrak{A}_k) = \beta^N_k$ P-f-s. $(1 \leq k \leq N)$.

Beweis:
Beweis durch vollständige Induktion nach $k' = N-k$:

i) $k' = 0$: In diesem Fall besteht der Prozeß nur aus der Zufallsvariablen x_N. Es gilt $\beta^N_N = x_N$ und trivialerweise ist $T^N_N = N$ optimal. Also folgt $\mathbb{E}(x_{T^N_N} \mid \mathfrak{A}_N) = x_N = \beta^N_N$.

ii) Sei nun die Aussage des Satzes für ein k mit $1 < k \leq N$ bewiesen. D.h.: $T_k^N := \min\{j:\ k \leq j \leq N,\ x_j = \beta_j^N\}$ ist optimale Stopzeit für $x_k, \ldots, x_N$ und $\beta_k^N = \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathfrak{A}_k)$ P-f.s.

Nach dem Absteigesatz ist dann

$$\tilde{T}_{k-1}^N := \begin{cases} k-1 & , \text{falls } x_{k-1} \leq \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathfrak{A}_{k-1}) \\ T_k^N & , \text{sonst} \end{cases}$$

eine optimale Stopzeit von $x_{k-1}, x_k, \ldots, x_N$.

Sei $G_{k-1} := \{x_{k-1} \leq \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathfrak{A}_{k-1})\} \in \mathfrak{A}_{k-1}$. Nach Definition von $\tilde{T}_{k-1}^N$ gilt also: $x_{\tilde{T}_{k-1}^N} = x_{k-1}\, 1_{G_{k-1}} + x_{T_k^N}\, 1_{G_{k-1}^c}$.

Mithin gilt dann:

$$\mathbb{E}(x_{\tilde{T}_{k-1}^N} \mid \mathfrak{A}_{k-1}) = x_{k-1}\, 1_{G_{k-1}} + \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathfrak{A}_{k-1})\, 1_{G_{k-1}^c} =$$

$$\underset{(\text{Def. v. } G_{k-1})}{=} \min(x_{k-1}, \mathbb{E}(x_{T_k^N} \mid \mathfrak{A}_{k-1})) =$$

$$\underset{(\text{Ind. Vor.})}{=} \min(x_{k-1}, \mathbb{E}(\beta_k^N \mid \mathfrak{A}_{k-1})) \underset{(\text{Def. v. } \beta_{k-1}^N)}{=} \beta_{k-1}^N \quad \text{P-f.s.}$$

Man sieht nun leicht, daß P-f.s. $T_{k-1}^N = \min\{j: k-1 \leq j \leq N, x_j = \beta_j^N\}$ und somit also $T_{k-1}^N = \tilde{T}_{k-1}^N$ P-f.s. gilt.
Damit ist Satz (3.5) bewiesen.

Die Bedeutung des Absteigesatzes besteht nicht so sehr darin, daß sich mit seiner Hilfe die Methode der 'backward induction' zu Berechnung einer optimalen Stopzeit eines endlichen stochastischen Prozesses herleiten läßt, sondern im folgenden:
Angenommen, wir wollen einen stochastischen Prozeß $x_1, x_2, \ldots$ optimal stoppen. Weiter habe dieser Prozeß ab einem endlichen k_o sehr schöne Eigenschaften, z.B. gelte $x_{k_o}, x_{k_o+1}, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt. Dann können wir uns aufgrund des Absteigesatzes zunächst ganz auf diesen 'Rest' beschränken und hierfür eine

optimale Stopzeit suchen, ohne immer den störenden Anfang mitschleppen zu müssen. Damit wird der Anwendungsbereich unserer folgenden Untersuchungen, wenn wir nämlich stochastische Prozesse mit speziellen Eigenschaften studieren, ausgedehnt auf solche, die diese Eigenschaft erst ab einem $k_o \in \mathbb{N}$ besitzen.

Jedoch nützt uns der Absteigesatz im Fall eines unendlichen Prozesses nichts, wenn wir nicht schon eine optimale Stopzeit kennen für einen 'Rest' $x_{k_o}, x_{k_o+1}, \ldots$ dieses Prozesses.

Eine unendlich-stufige optimale Stopzeit des stochastischen Prozesses $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit x_k $\mathfrak{A}_k$-meßbar, $k \in \mathbb{N}$, liefert uns der folgende Satz, der mehrere Ergebnisse aus ((11)) zusammenfaßt.

(3.6) Satz: (Optimales Stoppen mittels der Snell'schen Enveloppe)

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine an $(\mathfrak{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ adaptierte Folge von P-integrablen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(\sup\{x_k^- : k \in \mathbb{N}\}) < \infty$.

A) Es sei $e_k := \text{ess-inf}\{\mathbb{E}(x_T \mid \mathfrak{A}_k) : T \in \mathcal{T}_k^\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$.

$(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt die 'Snell'sche Enveloppe' von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. (e_k) ist das größte 'reguläre' Submartingal, das von (x_k) dominiert wird, d.h.:

a) $e_k \leq x_k$ P-f.s., für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) (e_k) ist ein Submartingal mit der stärkeren Eigenschaft

$e_k \leq \mathbb{E}(e_T \mid \mathfrak{A}_k)$ für alle $T \in \mathcal{T}_k^\infty$ ('Regularität')

c) Ist $(\tilde{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal mit den Eigenschaften a) und b), so folgt: $\tilde{e}_k \leq e_k$ P-f.s., für alle $k \in \mathbb{N}$.

B) Das Infimum $\inf\{\mathbb{E}(x_T) : T \in \mathcal{T}_1^\infty\}$ wird genau dann angenommen, wenn die folgende Stopzeit T_o P-f.s. endlich ist: $T_o := \inf\{k \in \mathbb{N} : x_k = e_k\}$. ($\inf \emptyset := +\infty$).

In diesem Fall gilt $\mathbb{E}(x_{T_o}) = \inf\{\mathbb{E}(x_T): T \in \mathcal{T}_1^\infty\}$,

d.h. T_0 ist eine optimale Stopzeit von $x_1, x_2, \ldots$ bzgl. $(\mathcal{K}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Außerdem gilt $e_1 = \mathbb{E}(e_{T_o} \mid \mathcal{K}_1)$ P-f.s.

C) Falls $x_k \to \infty$, $k \to \infty$, P-f.s., so ist $P(\{T_o < \infty\}) = 1$, also T_o optimal.

Beweis:

Teil A: ((11)), Seite 122, Prop. VI-1-2.

Teil B: ((11)), Seite 124, Prop. VI-1-3.

Teil C: ((11)), Seite 127, Corollary VI-1-7.

Die Schwierigkeit liegt nun darin, daß $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht bekannt ist. der folgende Satz gibt eine optimale Stopzeit konstruktiv an:

(3.7) Satz:

Sei $x_k = x_k'' + x_k' = x_k^{**} + x_k^*$, $k \in \mathbb{N}$, wo alle Komponenten $\mathcal{K}_k$-meßbar sind und es gelte:

i) $\mathbb{E}(\sup\{(x_k')^-: k \in \mathbb{N}\}) < \infty$.

ii) $0 \leq x_1'' \leq x_2'' \leq \ldots \leq \lim_{k \to \infty} x_k'' = \infty$, P-f.s.

iii) Die $(x_k^*)^+$ sind gleichgradig integrierbar ($k \in \mathbb{N}$).

iv) $x_k^{**} \leq c\, x_k''$ für alle $k \in \mathbb{N}$, für ein $c \in (0, \infty)$.

Für $N \in \mathbb{N}$ sei $T_1^N := \min\{j: 1 \leq j \leq N, x_j = \beta_j^N\}$.

($(\beta_j^N)_{1 \leq j \leq N}$ gemäß Satz (3.5)).

Dann ist $T_1 := \sup\{T_1^N : N \in \mathbb{N}\}$ eine optimale Stopzeit des Prozesses $x_1, x_2, \ldots$ bzgl. $(\mathcal{K}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und es gilt:

$$\mathbb{E}(x_{T_1}) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(x_{T_1^N}) .$$

Beweis: Siehe ((2)), Seite 39, Theorem 2.

(3.8) Bemerkung:

Wie man leicht sieht, gilt $\beta_j^{N+1} \leq \beta_j^N$ P-f.s. für alle $j \in N$ und alle $N \in \mathbb{N}$. Also gilt P-f.s $T_1^N \leq T_1^{N+1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Mithin folgt $T_1^N \nearrow T_1$ P-f.s.

Die Bedingung ii) von Satz (3.7) läßt sich etwas abschwächen, wenn man auf die doppelte Zerlegung des Prozesses (x_k) verzichtet:

(3.9) Satz:

Sei $x_k = x_k'' + x_k'$, $k \in \mathbb{N}$, wo alle Komponenten $\mathcal{K}_k$-meßbar sind und es gelte:

i) $\mathbb{E}(\sup\{(x_k')^- : k \in \mathbb{N}\}) < \infty$.

ii) $(x_k'')_{k \in \mathbb{N}}$ ist P-f.s. monoton wachsend und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(x_j'' - x_{j-1}'' \mid \mathcal{K}_{j-1}) = \infty \quad . \quad (x_0'' := 0,\ \mathcal{K}_0 := \{\phi, \Omega\})$$

iii) Die $(x_k')^+$ sind gleichgradig integrierbar ($k \in \mathbb{N}$).

Dann existiert eine optimale Stopzeit T_1 von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und zwar kann T_1 gewählt werden als eine optimale Stopzeit des stochastischen Prozesses $y_k := \sum_{j \leq k} d_j + x_k'$, $k \in \mathbb{N}$, wobei

$d_j := \mathbb{E}(x_j'' - x_{j-1}'' \mid \mathcal{K}_{j-1})$, $j \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Aus ii) folgt $\sum_{j=1}^{k} d_j \nearrow \infty$, P-f.s., somit erfüllt $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von Satz (3.7). Es existiert also eine optimale Stopzeit T_1 des Prozesses (y_k). Dann ist aber T_1 auch eine optimale Stopzeit des Prozesses (x_k), denn aus der Additivität des Erwartungswerts und dem folgenden Lemma ergibt sich, daß für alle $T \in \mathcal{T}_1^{\infty}$ gilt: $\mathbb{E}(x_T) = \mathbb{E}(y_T)$.

(3.10) Lemma:

Es sei $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $(\mathfrak{A}_k)$-adaptierte Folge nichtnegativer Zufallsvariablen. Sei $\mathfrak{A}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $d_k := \mathbb{E}(\Delta_k | \mathfrak{A}_{k-1})$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{T} \Delta_j\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{T} d_j\Big) \text{ für alle Stopzeiten } T \in \mathcal{T}_1^{\infty}.$$

Beweis: Sei $T \in \mathcal{T}_1^{\infty}$.

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{T} \Delta_j\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T=k\}} \sum_{j=1}^{k} \Delta_j \, dP =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\{T=k\}} \Delta_j \, dP = (*).$$

Da $\Delta_j \geq 0$ P-f.s., läßt sich die Reihe umsummieren:

$$(*) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \int_{\{T=k\}} \Delta_j \, dP = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{T \geq j\}} \Delta_j \, dP =$$

$$\overset{(\{T \geq j\} \in \mathfrak{A}_{j-1})}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{T \geq j\}} \mathbb{E}(\Delta_j | \mathfrak{A}_{j-1}) \, dP =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{T \geq j\}} d_j \, dP = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \int_{\{T=k\}} d_j \, dP \overset{\text{(Umsumm.)}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\{T=k\}} d_j \, dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T=k\}} \sum_{j=1}^{T} d_j \, dP = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{T} d_j\Big).$$

Damit ist Lemma (3.10) bewiesen.

Die Forderung ii) von Satz (3.9) ist schwächer als die Forderung ii) in Satz (3.8). Die Beziehungen zwischen den beiden Forderungen werden wir im folgenden Lemma untersuchen:

(3.11) Lemma:

Es sei $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine $(\mathcal{A}_k)$-adaptierte Folge nichtnegativer Zufallsvariablen.

(Δ_k) habe die Eigenschaft A, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$, P-f.s.

(Δ_k) habe die Eigenschaft B, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\Delta_k | \mathcal{A}_{k-1}) = \infty$ P.f.s.

Dann gilt:

i) Falls $\mathbb{E}(\sup\{\Delta_k : k \in \mathbb{N}\}) < \infty$, so sind A und B äquivalent.

ii) A impliziert stets B.

iii) B impliziert nicht A.

Beweis:

Sei $d_k := \mathbb{E}(\Delta_k | \mathcal{A}_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$,. Nach Lemma (3.10) gilt dann:

(*): $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T} \Delta_k) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T} d_k)$ für alle $T \in \mathcal{T}_1^{\infty}$.

Bew. von i): Wir haben nur B impliziert A zu zeigen.

Wir nehmen an, daß B erfüllt, A aber nicht erfüllt sei, d.h.

$P(\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k < \infty) > 0.$

Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir die Stopzeit T_N gemäß

$T_N := \inf\{j \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{j} \Delta_k > N\}$. Für genügend großes $N \in \mathbb{N}$

gilt mithin $P(T_N = \infty) > 0$. Wegen Eigenschaft B, der Beziehung (*) und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt dann:

$$\infty = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T_N} d_k) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\min(T_N, n)} d_k) \underset{(*)}{=} \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\min(T_N, n)} \Delta_k) =$$

$$= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T_N} \Delta_k) .$$

Andererseits gilt nach Definition von T_N :

a) $\sum_{k=1}^{T_N} \Delta_k \leq N$, falls $T_N = \infty$.

b) $\sum_{k=1}^{T_N} \Delta_k \leq N + \Delta_{T_N} \leq N + \sup\{\Delta_k : k \in \mathbb{N}\}$, falls $T_N < \infty$.

Mit Hilfe der Voraussetzung folgt also: $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T_N} \Delta_k) < \infty$.

Somit ist ein Widerspruch gegeben.

Beweis von ii):

Wir nehmen an, (Δ_k) besitze die Eigenschaft A, aber nicht die Eigenschaft B.

Sei $\delta_k := \min(\Delta_k, 1)$ und $d'_k := \mathbb{E}(\delta_k | \mathcal{A}_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann besitzt auch die Folge (δ_k) die Eigenschaft A und nicht die Eigenschaft B.

Für $N \in \mathbb{N}$ sei $T_N := \inf\{j \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{j} d'_k > N\}$.

Analog wie in Teil i) folgt nun:

a) $P(T_N = \infty) > 0$ für genügend großes N, da B nicht gilt.

b) $\infty = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T_N} \delta_k) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T_N} d'_k)$, für genügend großes N.

c) $\sum_{k=1}^{T_N} d'_k \leq N + \sup\{d'_k : k \in \mathbb{N}\} \leq N + 1$ P-f.s.

Also ist $\mathbb{E}(\sum_{k \leq T_N} d'_k) < \infty$.

Somit ergibt sich ein Widerspruch zu b).

iii) Gegenbeispiel:

Sei $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, in $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Sei weiter $\mathcal{A}_k := {}^{B}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ und $A_k := [0, 2^{-k}]$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann besitzt die Folge $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\Delta_k := 2^k 1_{A_k}(\xi_k)$, $k\in\mathbb{N}$, die Eigenschaft B, aber nicht die Eigenschaft A, denn:

A) $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$ genau dann, wenn $\xi_k \in A_k$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k \in A_k) < \infty$, folgt nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma, daß dies P-f.s. nicht eintritt.

B) (Δ_k) ist unabhängig, mithin $\mathbb{E}(\Delta_k | \mathcal{E}_{k-1}) = \mathbb{E}(\Delta_k) = 1$ P-f.s. Also gilt $d_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Eigenschaft B ist erfüllt.

Bemerkung:

Lemma (3.10) besagt also, daß man in dem obigen Beispiel statt der von ξ_k abhängigen Kosten Δ_k die Pauschale 1 zahlen kann, ohne das optimale Stoppen zu beeinflussen. Interpretiert man Δ_k als zum Zeitpunkt k fällige Kosten, so kann man in Lemma (3.10) ganz allgemein die Größe d_k als eine 'Pauschale' für Δ_k ansehen, die zum Zeitpunkt k-1 zu zahlen ist (d_k ist $\mathcal{E}_{k-1}$-meßbar),

(3.12) Bemerkung:

Für allgemeine stochastische Prozesse liefert Satz (3.7) bzw. (3.9) die einzig bekannte Konstruktion einer optimalen unendlich-stufigen Stopzeit. Leider ist diese Konstruktion sehr aufwendig und umständlich.

1) Hat man im endlich-stufigen Fall die Stopzeit T_1^N mit Hilfe der β_j^N, $1 \le j \le N$, berechnet und will man jetzt die (N+1)-stufige Stopzeit T_1^{N+1} berechnen, so muß man vollständig von vorne beginnen. Die Kenntnis der β_j^N $(1 \le j \le N)$ nützt einem nichts zu Berechnung der β_j^{N+1} $(1 \le j \le N+1)$.

Im unendlich-stufigen Fall hat man somit $(\beta_j^N)_{1 \le j \le N}$ zu berechnen für jedes $N \in \mathbb{N}$. Dies ist sehr aufwendig.

2) Im Normalfall ist $\mathcal{E}_k$ wohl gegeben durch $\mathcal{B}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$

mit gewissen Zufallsvariablen ξ_k, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist β_j^N eine Funktion der Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_j$, $j = 1, \ldots, N$. Mithin wächst die Zahl der zu berücksichtigenden Variablen mit wachsendem N ins Uferlose.

Diese Situation verbessert sich erheblich, wenn der stochastische Prozeß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Funktion eines endlich-dimensionalen (zeitlich-homogenen) Markovprozesses ist in dem Sinne wie es im folgenden Kapitel dargelegt wird. In der Darstellung verzichten wir auf die Forderung, daß der Markovprozeß nur Werte in einem endlich-dimensionalen euklidischen Raum annehmen darf, obwohl man andernfalls nur eine scheinbare Vereinfachung der Situation gegenüber dem allgemeinen Fall erreicht hat.

IV) Optimales Stoppen eines Markovprozesses

I) Zeitunabhängiger Fall:

Voraussetzungen: Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, eine aufsteigende Folge $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}$ von Untersigmaalgebren von $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$), ein Meßraum $(E, \mathcal{E})$ und ein E-wertiger $(\mathfrak{A}_k)$-adaptierter zeitlich-homogener Markovprozeß $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit diskreter Zeit, d.h.:

1) ξ_k ist $\mathfrak{A}_k$-$\mathcal{E}$-meßbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

2) Es existiert eine Übergangswahrscheinlichkeit $Q: E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$ mit $P_{\xi_{k+1}}(\cdot \mid \mathfrak{A}_k) = P_{\xi_{k+1}}(\cdot \mid \xi_k) = Q(\xi_k, \cdot)$, $k \in \mathbb{N}$.

Weiter sei eine beschränkte 'Schadensfunktion' $h: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, welche $\mathcal{E}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-meßbar ist, gegeben, sowie 'Kostenfunktionen' $c_k: (\Omega, \mathfrak{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $k \in \mathbb{N}$, und eine Konstante $\alpha > 0$.

Die Kostenfunktionen $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mögen weiterhin die folgende Bedingung erfüllen: $\mathbb{E}(c_{k+1} | \mathfrak{A}_k) = c(\xi_k)$ P-f.s., $k \in \mathbb{N}$, mit einer geeigneten Funktion $c: (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

Problemstellung:
Es soll der stochastische Prozeß $x_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j c_j + \alpha^k h(\xi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, bzgl. der Familie $(\mathfrak{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ optimal gestoppt werden.

Interpretation:
(Nur für $\alpha = 1$, α ist eine Art 'Inflationsfaktor').
Es wird uns sukzessive die Realisation $(\xi_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ eines zeitlich homogenen Markovprozesses $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vorgelegt und zwar zum Zeitpunkt k die Komponente $\xi_k(\omega)$. Wenn wir uns für ein $\xi_k(\omega)$ entscheiden, so haben wir den Schaden $h(\xi_k(\omega))$ zu tragen. Außerdem kostet aber jedes Vorlegen einer weiteren Komponente Geld, so daß wir bei Vorlage von $\xi_k(\omega)$ noch die Kosten $c_k(\omega)$ zu zahlen haben. Unser Ziel wird es sein, eine Entscheidungsregel (Stopzeit) zu finden, die den Erwartungswert des Gesamtverlustes minimiert.

Beispiel: (wieder sei der Einfachheit halber $\alpha = 1$)

Ein Arbeitssuchender A besucht jeden Tag jeweils eine Firma, um sich dort vorzustellen und zu informieren. Lehnt er ein Stellenangebot in der Firma $\hat{\xi}_k$ ab, so sucht er sich nach einer festen Übergangswahrscheinlichkeit Q eine weitere Firma $\hat{\xi}_{k+1}$, bei der er sich am (k+1)-ten Tag vorstellt.
Somit interpretieren wir die Folge $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \ldots$ als Realisation eines zeitlich homogenen Markovprozesses.
Jeder Tag, an dem er ein Angebot ablehnt, ist mit Kosten verbunden, welche - z.B. wegen der Reisekosten - von der Realisation $(\hat{\xi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abhängen (wir setzen hier $\omega = (\hat{\xi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$).
Entscheidet sich A schließlich für die Firma $\hat{\xi}_k$, so hat er einen

Schaden $h(\hat{\xi}_k)$ zu tragen (dies interpretieren wir als die Differenz seines Gehalts bei der Firma $\hat{\xi}_k$ zum maximal erreichbaren Gehalt).

(4.1) Bemerkung:

Das optimale Stoppen von Markovprozessen wird ausführlich behandelt in dem Buch von A.N. Sirjaev ((16)). Allerdings sind dort nur für den Fall gleichmäßig integrierbar nach oben beschränkter Gesamtkosten optimale Stopzeiten konstruktiv angegeben, während wir den Fall divergierender Gesamtkosten behandeln.

(4.2) Definition:

Es sei $B(E,\mathcal{E}) := \{ h:E \longrightarrow \mathbb{R} : h \text{ beschr. und } \mathcal{E}\text{-}\mathcal{B}_1\text{-meßb.}\}$

und $B_+(E,\mathcal{E}) := \{h \in B(E,\mathcal{E}) : h \geq 0\}$.

Der nichtnegative und lineare Operator $R:B(E,\mathcal{E}) \longrightarrow B(E,\mathcal{E})$ sei definiert durch:

$$Rh(\xi) := \int_E h(y)\, Q(\xi, dy), \quad h \in B(E,\mathcal{E}).$$

(4.3) Bemerkung:

$$\mathbb{E}(h(\xi_{k+1}) \mid \xi_k) = \int_E h(y)\, P_{\xi_{k+1}}(dy \mid \xi_k) = \int_E h(y)\, Q(\xi_k, dy) =$$

$$= Rh(\xi_k).$$

Der Operator R entspricht also dem bedingten Erwartungswertoperator.

(4.4) Lemma:

Es sei $h_o \in B_+(E,\mathcal{E})$ fest.

Es sei $\alpha > 0$, $c: (E,\mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Wir definieren den nichtlinearen Operator $G_{(\alpha,c)}: B_+(E,\mathcal{E}) \longrightarrow B_+(E,\mathcal{E})$ durch:

$G_{(\alpha,c)}h := \min(h_o,\ c + \alpha Rh)$, $h \in B_+(E,\mathcal{E})$.

Dann gilt: Die Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ mit $h_{k+1} := G_{(\alpha,c)}h_k$, $k \geq 0$,

ist eine monoton fallende Folge in $B_+(E,\mathcal{E})$.

Beweis: Folgt aus der Monotonie von R und min-Bildung.

Im folgenden denken wir uns h_o, c und $\alpha > 0$ fest gegeben.

(4.5) Definition:

Mit h_∞ bezeichnen wir die Funktion $h_\infty := \lim_{k\to\infty} h_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} h_k \in B_+(E,\mathcal{E})$

(4.6) Lemma:

Für h_∞ gilt: $h_\infty = \min(h_0, c + \alpha R h_\infty)$.

Beweis: Folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und der Stetigkeit der Minimumsbildung.

(4.7) Satz:

Es sei $x_k := \sum_{j\le k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_0(\xi_k), k \in \mathbb{N}$, und

$$e_k := \sum_{j\le k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_\infty(\xi_k), k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das größe Submartingal bzgl. P, das von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dominiert wird, d.h. es gilt:

i) $e_k \le x_k$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Submartingal bzgl. P.

iii) Ist $(e_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ ein weiteres Submartingal bzgl. P mit $e_k^* \le x_k$ P-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $e_k^* \le e_k$ P-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis:

i) $h_\infty \le h_0$, also gilt $e_k \le x_k$, $k \in \mathbb{N}$.

ii) $$\mathbb{E}(e_{k+1} | \mathcal{A}_k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^{k+1} R h_\infty(\xi_k) \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k \min(h_0(\xi_k), c(\xi_k) + \alpha R h_\infty(\xi_k))$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_\infty(\xi_k) = e_k^*. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

iii) Beh.: Es gilt $e_k^* \leq \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_1(\xi_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (P-f.s.)

Beweis durch vollständige Induktion nach 1:

Die Behauptung ist nach Voraussetzung richtig für 1=0.

Sei die Behauptung richtig für ein $1 \geq 0$, dann gilt:

$$e_k^* \underset{\text{(Subm.)}}{\leq} \mathbb{E}(e_{k+1}^* | \mathcal{A}_k) \underset{\text{(Ind. Vor.)}}{\leq}$$

$$\leq \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^{k+1} h_1(\xi_{k+1}) | \mathcal{A}_k\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k (c(\xi_k) + \alpha R h_1(\xi_k)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit $e_k^* \leq \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_0(\xi_k)$, folgt:

$$e_k^* \leq \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k \min(h_0(\xi_k), c(\xi_k) + \alpha R h_1(\xi_k)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_{1+1}(\xi_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{P-f.s.})$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Mit $1 \longrightarrow \infty$ folgt dann:

$$e_k^* \leq \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_\infty(\xi_k) \quad \text{P-f.s.}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Aussage iii) bewiesen.

Für den in Satz (4.7) definierten stochastischen Prozeß (x_k) lassen sich nun endlich-stufige optimale Stopzeiten berechnen:

(4.8) Satz:

Sei $s, N \in \mathbb{N}$, $s < N$. Dann ist eine optimale Stopzeit des Prozesses

$$x_k := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_0(\xi_k), \quad s \le k \le N, \text{ gegeben}$$

durch: $T_s^N := \min\{k : s \le k \le N,\ h_0(\xi_k) = h_{N-k}(\xi_k)\}$

und es gilt:

$$\inf\{\mathbb{E}(x_T) : T \in \mathfrak{T}_s^N\} = \mathbb{E}(x_{T_s^N}) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^s h_{N-s}(\xi_s)\Big).$$

Beweis:

Wir werden die Methode der 'backward induction' anwenden:

$$\beta_N^N = x_N = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^N h_0(\xi_k).$$

$$\beta_{N-1}^N = \min(x_{N-1}, \mathbb{E}(x_N \mid \mathfrak{A}_{N-1})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N-2} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^{N-1} \min(h_0(\xi_{N-1}), c(\xi_{N-1}) + \alpha R h_0(\xi_{N-1})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N-2} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^{N-1} h_1(\xi_{N-1}).$$

Wie man durch Induktion leicht sieht, gilt also:

$$\beta_k^N = \min(x_k, \mathbb{E}(\beta_{k+1}^N \mid \mathfrak{A}_k)) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_{N-k}(\xi_k).$$

$(s \le k \le N)$.

Nach Satz (3.5) ist eine optimale Stopzeit von $x_s, \ldots, x_N$ gegeben durch $T_s^N := \min\{k: s \le k \le N,\ x_k = \beta_k^N\} =$

$$\min\Big\{s \le k \le N: \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_0(\xi_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_{N-k}(\xi_k) \Big\} =$$

$$= \min \Big\{ s \le k \le N: \quad h_o(\xi_k) = h_{N-k}(\xi_k) \Big\} .$$

Die zweite Aussage des Satzes folgt aus $\mathbb{E}(x_{T_s^N}) = \mathbb{E}(\beta_s^N)$ gemäß Satz (3.5).

(4.9) Satz:

Es gelte: $\inf_{k \in \mathbb{N}} c(\xi_k) \ge d_o > 0$, falls $\alpha > 1$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j c(\xi_j) = \infty \quad \text{P-f.s.}, \text{ falls } \alpha \le 1.$$

Sei $s \in \mathbb{N}$. Dann ist eine optimale Stopzeit des stochastischen Prozesses

$$x_k := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_o(\xi_k), \quad k = s, s+1, \ldots$$

gegeben durch:

$$T_s := \inf \Big\{ s \le k \le \infty: \quad h_o(\xi_k) = h_\infty(\xi_k) \Big\}$$

und es gilt:

$$\mathbb{E}(x_{T_s}) = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^s h_\infty(\xi_s) \Big).$$

Beweis:

Wir werden Satz (3.7) anwenden:

1) Im Fall $\alpha \le 1$ setze: $x'_k := x^*_k := \alpha^k h_o(\xi_k)$, $k \ge s$,

sowie $x''_k := x^{**}_k := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j)$, $k \ge s$.

Da $c(\xi_j) \ge 0$, h_o beschränkt und $\alpha \le 1$ ist, folgt mit der Voraussetzung dieses Satzes, daß $(x_k)_{k \ge s}$ die Bedingungen von Satz (3.7) erfüllt. Mithin ist eine optimale Stopzeit von $(x_k)_{k \ge s}$ gegeben durch $T_s^* = \sup \{ T_s^N : N \in \mathbb{N}, N \ge s \}$ und $\mathbb{E}(x_{T_s^*}) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(x_{T_s^N})$.

2) Im Fall $\alpha > 1$ setze: $x'_k := \alpha^k h_o(\xi_k)$, $k > 1$,

$x'_1 := h_0(\xi_1) - \alpha$.

$x''_k := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j)$, $k > 1$ und $x''_1 := +\alpha d_o$.

Sowie $x^*_k := 0$ und $x^{**}_k := x_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $x_k = x''_k + x'_k = x^{**}_k + x^*_k$, $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq s$).

Dann sind trivialerweise die Voraussetzungen i) und iii) von Satz (3.7) erfüllt. Bedingungung ii) von Satz (3.7) folgt aus $\alpha > 1$ und der Voraussetzung dieses Satzes. Es ist nur noch Bedingung iv) nachzuweisen:

Zunächst gilt $x^{**}_1 = \alpha h_0(\xi_1) \leq \alpha d_1 = \frac{d_1 x''}{d_o}$ mit $d_1 := \sup\{h_0(x) : x \in E\}$.

Es gilt: $x''_k \geq \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j d_o \geq \alpha^{k-1} d_o$ und somit

$x^{**}_k \leq (1 + \frac{\alpha d_1}{d_o})\, x''_k$ für $k \geq 2$.

Also erfüllt $(x_k)_{k \geq s}$ die Voraussetzungen des Satzes (3.7).

Mithin ist eine optimale Stopzeit von $(x_k)_{k \geq s}$ gegeben durch:

$T^*_s := \sup\{ T^N_s : N \in \mathbb{N},\ N \geq s \}$ und $\mathbb{E}(x_{T^*_s}) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(x_{T^N_s})$.

3) Sei also $T^*_s := \lim_{N \to \infty} T^N_s$ $(= \sup\{T^N_s : N \in \mathbb{N},\ N \geq s\})$.

Beh.: $T_s = T^*_s$.

Beweis:

a) Sei $k \in \mathbb{N}$, $s \leq k$. Sei $T^*_s(\omega) = k$. Da T^*_s nur diskrete Werte annimmt, folgt : Es existiert ein $N_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $N \geq N_o$ gilt: $T^N_s(\omega) = k$. Aus der Darstellung von T^N_s in Satz (4.8) folgt dann: $h_{N-1}(\xi_1(\omega)) < h_o(\xi_1(\omega))$ für alle 1 mit $s \leq 1 < k$.

Da $h_\infty \leq h_{N-1}$, folgt mithin auch: $h_\infty(\xi_1(\omega)) < h_o(\xi_1(\omega))$ für alle $1 \in \mathbb{N}$ mit $s \leq 1 < k$. Also ist $T_s(\omega) \geq k$.

Hiermit ist gezeigt, daß $T_s \geq T^*_s$.

b) Sei andererseits $T_s(\omega) = k$.

Dann gilt für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $s \leq l < k$: $h_\infty(\xi_l(\omega)) < h_o(\xi_l(\omega))$.

Da es nur endlich viele l sind und $h_{N-l} \searrow h_\infty$ für $N \longrightarrow \infty$, folgt:

Es existiert ein $N_o \in \mathbb{N}$ $(N_o \geq k)$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_o$ gilt: $h_\infty(\xi_l(\omega)) \leq h_{N-l}(\xi_l(\omega)) < h_o(\xi_l(\omega))$, $l \in \mathbb{N}$, $s \leq l < k$.

Also gilt $T_s^N(\omega) \geq k$ für alle $N \geq N_o$ und somit $T_s^*(\omega) \geq k$.

Mithin ist gezeigt: $T_s^* \geq T_s$.

Nach Satz (3.7) gilt nun weiterhin:

$$\mathbb{E}(x_{T_s}) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(x_{T_s^N}) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^s h_{N-s}(\xi_s)\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^s h_\infty(\xi_s)\Big), \text{ nach dem Satz von der}$$

monotonen Konvergenz.

Damit ist Satz (4.9) bewiesen.

Im folgenden Satz charakterisieren wir die Snell' sche Enveloppe von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

(4.10) Satz:

Der stochastische Prozeß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erfülle die Voraussetzungen von Satz (4.9).

Dann ist der stochastische Prozeß $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$e_k := \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j c(\xi_j) + \alpha^k h_\infty(\xi_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

die Snell' sche Enveloppe zu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Beweis:

Sei $(e_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ die Snell' sche Enveloppe zu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Dann ist $(e_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal, das von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dominiert wird. Folglich gilt nach Satz (4.7): $e_k^* \leq e_k$ P-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter sind die Erwartungswerte von e_k^* und e_k gleich, denn nach Satz (4.9) gilt: $\mathbb{E}(e_k) = \mathbb{E}(x_{T_k}) < \infty$ und nach Satz (3.6)B) gilt: $\mathbb{E}(e_k^*) = \inf\{\mathbb{E}(x_T): T \in \mathfrak{T}_k^\infty\} = \mathbb{E}(x_{T_k})$. Mithin folgt $e_k^* = e_k$ P-f.s. für alle k.

Jetzt kehren wir zu den etwas allgemeineren Kostenfunktionen c_k zurück, wie sie zu Anfang dieses Abschnitts eingeführt wurden:

(4.11) Satz:

Es sei $x_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j c_j + \alpha^k h_o(\xi_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

(Hierbei sei $\alpha > 0$, $h_o \in B_+(E, \mathcal{E})$, $c_j: (\Omega, \mathcal{A}_j) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbb{E}(c_{j+1} \mid \mathcal{A}_j) = c(\xi_j)$ P-f.s. $(j \in \mathbb{N})$, mit einer geeigneten Funktion $c: (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$.

Im Fall $\alpha > 1$ gelte: $c(\xi_j) \geq d_o > 0$ P-f.s. für alle $j \in \mathbb{N}$.

Im Fall $\alpha \leq 1$ gelte: $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j c(\xi_j) = \infty$ P-f.s.

Sei $s \in \mathbb{N}$. Dann ist eine optimale Stopzeit von $(x_k)_{k \geq s}$ gegeben durch: $T_s := \inf\{k \in \mathbb{N}: k \geq s,\ h_o(\xi_k) = h_\infty^*(\xi_k)\}$.

Hierbei ist $h_\infty^* := \lim_{r \to \infty} (G_{(\alpha, \alpha c)})^r h_o$, d.h.:

$h_\infty^* = \lim_{r \to \infty} h_r^*$ mit $h_o^* := h_o$, $h_r^* := \min(h_o, \alpha \cdot (c + Rh_{r-1}^*))$, $r \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Lemma (3.10) die gleiche optimale Stopzeit wie $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wobei

$$y_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j \mathbb{E}(c_j \mid \mathcal{A}_{j-1}) + \alpha^k h_o(\xi_k) =$$

$$= \mathbb{E}(c_1) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha^j (\alpha \cdot c)(\xi_j) + \alpha^k h_o(\xi_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da die Addition einer Konstanten die optimale Stopzeit offensichtlich nicht beeinflußt, folgen die Aussagen des Satzes (4.11) nun aus Satz (4.9).

II) Zeitabhängiger Fall:

Voraussetzungen: Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine aufsteigende Folge $\mathcal{A}_o \subset \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}$ von Untersigmaalgebren von $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_o := \{\emptyset, \Omega\}$), ein Meßraum $(E, \mathcal{E})$ und ein E-wertiger Markovprozeß $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit diskreter Zeit, d.h.:

1) ξ_k ist $\mathcal{A}_k$-$\mathcal{E}$-meßbar für alle $k \in \mathbb{N}$.

2) Es existieren Übergangswahrscheinlichkeiten $Q_k : E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$

mit $P_{\xi_{k+1}}(\cdot \mid \mathcal{A}_k) = P_{\xi_{k+1}}(\cdot \mid \xi_k) = Q_k(\xi_k, \cdot)$, $k \in \mathbb{N}$.

Weiter seien gleichmäßig beschränkte 'Schadensfunktionen' $h^{(k)} : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, welche $\mathcal{E}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-meßbar sind, gegeben, sowie 'Kostenfunktionen' $K_k : (\Omega, \mathcal{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $k \in \mathbb{N}$, und eine Konstante $\alpha > 0$.

Die Kostenfunktionen (K_k) mögen weiterhin die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Es existieren $c_k : (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mit:

$\mathbb{E}(K_{k+1} \mid \mathcal{A}_k) = c_k(\xi_k)$, für $k \in \mathbb{N}$.

b) Im Fall $\alpha > 1$ gelte: $c_k(\xi_k) \geq d_o > 0$ P-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$. Im Falle $\alpha \leq 1$ gelte: $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^j c_j(\xi_j) = \infty$ P-f.s.

Problemstellung:

Es soll der stochastische Prozeß

$$x_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j K_j + \alpha^k h^{(k)}(\xi_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

optimal gestoppt werden.

Dieser zeitabhängige Fall des Stoppens eines Markovprozesses läßt sich nun formal auf den zeitunabhängigen Fall zurückführen:

Es sei $(E^*, \mathcal{E}^*) := (\mathbb{N} \times E, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{E})$.

$\xi_k^* : (\Omega, \mathcal{A}_k) \longrightarrow (E^*, \mathcal{E}^*), \ \xi_k^* := (k, \xi_k), \ k \in \mathbb{N}$.

$Q: E^* \times \mathcal{E}^* \longrightarrow [0,1], \ Q((k,x),\cdot) := Q_k(x,\cdot) \otimes 1_{\cdot}(k+1)$.

$c: (E^*, \mathcal{E}^*) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)), \ c(k,x) := c_k(x)$,

$h_o(E^*, \mathcal{E}^*) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)), \ h_o(k,x) := h^{(k)}(x), (k,x) \in E^*$.

Dann ist $(\xi_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ (formal) ein zeitlich-homogener Markovprozeß mit Übergangswahrscheinlichkeit Q und Zustandsraum E^*. Der stochastische Prozeß $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ schreibt sich dann gemäß:

$$x_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j K_j + \alpha^k h_o(\xi_k^*), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Folglich lassen sich die Ergebnisse des letzten Abschnitts entsprechend übertragen:

(4.12) Satz:

Eine optimale Stopzeit des stochastischen Prozesses $(x_k)_{k \geq s} (s \in \mathbb{N})$,

mit: $x_k := \sum_{j=1}^{k} \alpha^j K_j + \alpha^k h^{(k)}(\xi_k), \quad k \in \mathbb{N},$

ist gegeben durch:

$T_s := \inf \{k \in \mathbb{N}: k \geq s, \ h^{(k)}(\xi_k) = h_\infty^{(k)}(\xi_k)\}.$

Hierbei ist $h_\infty^{(k)}$ gegeben durch: $h_\infty^{(k)} := \lim_{r \to \infty} h_r^{(k)}$ mit:

$h_0^{(k)} := h^{(k)}, \quad h_{r+1}^{(k)} := \min(h_0^{(k)}, \alpha \cdot (c_k + \int_E h_r^{(k+1)}(y) Q_k(\cdot, dy))).$

Beweis:

Direkte Folgerung aus Satz (4.11) durch Übergang zu dem zeitlich-homogenen Markovprozeß (ξ_k^*).

(4.13) Bemerkung:

Bei endlichdimensionalem E bringt auch der zeitabhängige Fall des Stoppens eines Markovprozesses gegenüber dem Fall eines beliebigen stochastischen Prozesses eine erhebliche Vereinfachung für die Berechnung der optimalen Stopzeit, da die Zahl der Abhängigen, (d.h. dim E), für alle Funktionen $h_r^{(k)}$ konstant bleibt.

V) Allgemeines Modell eines Sequenztests bei endlich vielen Hypothesen und diskreter Zeit.

(gemäß Richter ((14)), Mammitzsch ((8))).

Voraussetzungen:

Gegeben seien Wahrscheinlichkeitsmaße $P_1, \ldots, P_n$ auf einem Meßraum $(\Omega, \mathfrak{A})$, eine aufsteigende Folge $\{\emptyset, \Omega\} =: \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}$ von Untersigmaalgebren von $\mathfrak{A}$, sowie nichtleere Mengen (Schadensbereiche) $S(\omega, k)$ für $\omega \in \Omega, 1 \leq k \leq \infty$, mit $S(\omega, k) \subset \mathbb{R}^n$, für $k < \infty$ und $S(\omega, \infty) := \{\vec{\infty}\}$. $\vec{\infty}$ bedeute hierbei den n-dimensionalen Vektor, dessen Komponenten sämtlich gleich ∞ sind.

Damit setzen wir fest:

(5.1) Definition:

1) Ein Sequenztest (T, s) besteht aus

   a) einer Stopzeit T der Familie $(\mathfrak{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $P_i(T = \infty) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.
   (d.h.: T ist zulässig bzgl. jedem P_i, $i=1, \ldots, n$; wir sagen wieder kurz: 'zulässig').

   b) einer zu T gehörigen 'Schadensfunktion' s, d.h. einer Abbildung $s: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\vec{\infty}\}$ derart, daß s meßbar ist bzgl. dem Sigmakörper $\mathfrak{A}_T$ der T-Vergangenheit, $\mathfrak{A}_T := \{F \in \mathfrak{A} : F \cap \{T=k\} \in \mathfrak{A}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}\}$, und $s(\omega) \in S(\omega, T(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

2) $r(T, s) := \int_\Omega s \circ d\vec{P}$ bezeichne den Risikovektor von (T, s), falls das Integral (eigentlich oder uneigentlich) existiert. (Hierbei sei $\vec{P} := (P_1, \ldots, P_n)^t$; $\circ$ bezeichne die Operation der komponentenweisen Multiplikation von Vektoren; x^t bedeute die Transponierte eines Vektors x).

3) Es sei $\Pi := \left\{ \pi \in \mathbb{R}^n \,.\, \pi_i \geq 0, i=1,\ldots,n; \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \right\}$.

$\pi \in \Pi$ heißt 'Bayes-Vorbewertung' von $(P_1, \ldots, P_n)$.

Es sei K eine Klasse von Tests, deren Risikovektor existiert, dann heißt $(T_o, s_o) \in K$ 'Bayestest' in K zur Vorbewertung $\pi \in \Pi$, wenn gilt: $\langle \pi, r(T_o, s_o) \rangle \leq \langle \pi, r(T,s) \rangle$ für alle $(T,s) \in K$.

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Skalarprodukt im $\overline{\mathbb{R}}^n$, $0 \cdot \infty := 0$).

$g_K(\pi) := \inf \left\{ \langle \pi, r(T,s) \rangle : (T,s) \in K \right\}$ heißt 'Bayesrisiko' von K zur Vorbewertung π.

Wir werden im folgenden dieses allgemeine Modell sukzessive spezialisieren. Das allgemeine Modell wurde von V. Mammitzsch und W. Fuchs in ((9)) behandelt.

Zunächst wählen wir speziellere Schadensbereiche:

Es seien meßbare Funktionen $a_j^{(k)} : (\Omega, \mathfrak{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+^n))$ $(k \in \mathbb{N}, j \in J \subset \mathbb{N})$ gegeben, mit deren Hilfe sich die Schadensbereiche wie folgt schreiben lassen:

$S(\omega, k) := \left\{ a_j^{(k)}(\omega) : j \in J \right\}$, $k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega$.

Weiter seien die Schadensbereiche in dem folgenden Sinne 'nach vorne abgeschlossen': Für alle $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ und $\pi^* \in \Pi$ existiere ein $j^* \in J$ mit $\langle a_{j^*}^{(k)}(\omega), \pi^* \rangle = \inf \left\{ \langle a_j^{(k)}(\omega), \pi^* \rangle : j \in J \right\}$.

Da wir nur Schadensvekoren mit nichtnegativen Komponenten zulassen, existiert $r(T,s)$ eigentlich oder uneigentlich zu jedem Test (T,s).

Interpretation:

Die auftretenden Schäden werden als Verlustfunktion eines Entscheidungsproblems aufgefaßt: Wenn wir uns bei Vorliegen der 'wahren Hypothese' P_i $(i=1,\ldots,n)$ zum Zeitpunkt k aufgrund der 'Beobachtung' $\omega \in \Omega$ für die 'Aktion' $j \in J$ entscheiden, so soll der Schaden $a_{j,i}^{(k)}(\omega) := \mathrm{pr}_i(a_j^{(k)}(\omega))$ eintreten.

Unser 'sequentielles Testproblem' ist also gekennzeichnet durch das Tupel: $(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{a_j^{(k)} : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$.

Für $\pi \in \Pi$ setzen wir $P_\pi := \sum_{i=1}^{n} \pi_i P_i$ und bezeichnen mit $\mathbb{E}_\pi(X)$ den Erwartungswert einer Zufallsvariablen X bzgl. P_π.

Dann gilt $P_i << P_\pi$, falls $\pi_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.
Allgemein gilt $\pi_i P_i << P_\pi$, $i = 1, \dots, n$. Somit besitzt $\pi_i P_i$ bzgl. P_π auf $\mathfrak{A}$ eine Dichte $(\pi_i p_i)$. Wir bezeichnen mit $\pi_i^{(k)}$ den bedingten Erwartungswert von $(\pi_i p_i)$ unter der Bedingung $\mathfrak{A}_k$ bzgl. P_π, d.h.: $\pi_i^{(k)} := \mathbb{E}_\pi((\pi_i p_i) \mid \mathfrak{A}_k)$.

$\pi_i^{(k)}$ ist die Dichte von $(\pi_i p_i) \mid \mathfrak{A}_k$ bzgl. $P_\pi \mid \mathfrak{A}_k$ und $\pi^{(k)}(\omega) := (\pi_1^{(k)}(\omega), \dots, \pi_n^{(k)}(\omega))^t \in \Pi$ ist die k-te a-posteriori-Verteilung zur Vorbewertung π (bei der Beobachtung ω).

(5.2) Hilfssatz:

Es sei T_o eine zulässige Stopzeit der Familie $(\mathfrak{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, s eine Schadensfunktion zu T_o. Dann gilt für $\pi \in \Pi$:

$$\langle \pi, r(T_o, s) \rangle = \mathbb{E}_\pi(\langle s, \pi^{(T_o)} \rangle).$$

Beweis:

$$\langle \pi, r(T_o, s) \rangle = \langle \pi, \int_\Omega s \circ d\vec{P} \rangle = \langle \pi, \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T_o = k\}} s \circ d\vec{P} \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T_o = k\}} \sum_{i=1}^{n} \pi_i s_i(\omega) \, dP_i(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T_o = k\}} \sum_{i=1}^{n} s_i(\omega) \, d(\pi_i P_i)(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T_o = k\}} \sum_{i=1}^{n} s_i(\omega) \, \pi_i^{(k)}(\omega) \, dP_\pi(\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{T_o = k\}} \langle s(\omega),\ \pi^{(k)}(\omega) \rangle \, dP_{\tilde{\pi}}(\omega) \quad = \quad \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}(\langle s,\ \pi^{(T_o)} \rangle).$$

(5.3) Definition:

1) $X_{\pi}^{(k)} : (\Omega,\ \mathcal{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $k \in \mathbb{N}$, sei definiert durch: $X_{\pi}^{(k)}(\omega) := \inf \{ \langle a_j^{(k)}(\omega),\ \pi^{(k)}(\omega) \rangle : j \in J \} \geq 0$.

2) $s_{\pi}^{(k)} : (\Omega,\ \mathcal{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^n,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n))$ sei definiert durch

$s_{\pi}^{(k)}(\omega) := a_{j_k(\omega)}^{(k)}(\omega) \in S(\omega, k)$ mit

$j_k(\omega) := \min \{ j \in J : \langle a_j^{(k)}(\omega),\ \pi^{(k)}(\omega) \rangle = X_{\pi}^{(k)}(\omega) \} < \infty$ n. Vor.

(5.4) Bemerkung:

1) $X_{\pi}^{(k)}$ ist $\mathcal{A}_k$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ - meßbar, wie man sofort sieht.

2) $s_{\pi}^{(k)}$ ist $\mathcal{A}_k$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$ - meßbar, denn:

a) $a^{(k)} : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$, $a^{(k)}(j, \omega) := a_j^{(k)}(\omega)$

ist $\mathcal{P}(J) \otimes \mathcal{A}_k$ - meßbar und

b) die Abbildung $\omega \longmapsto j_k(\omega) : \Omega \longrightarrow J$

ist $\mathcal{A}_k$ - $\mathcal{P}(J)$ - meßbar, wegen:

$$\{ j_k = j \} = \{ \{ \langle a_j^{(k)},\ \pi^{(k)} \rangle = X_{\pi}^{(k)} \} \cap \bigcap_{\substack{j^* \in J \\ j^* < j}} \{ \langle a_{j^*}^{(k)},\ \pi^{(k)} \rangle > X_{\pi}^{(k)} \} \in \mathcal{A}_k.$$

$(j \in J)$.

(5.5) Satz:

Es sei T_o eine zulässige Stopzeit, $\pi \in \Pi$.

$K_o := \{ (T_o, s) : s$ ist Schadensfunktion zu $T_o \}$. Dann gilt:

$s_{\pi}^{(T_o)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$ mit $s_{\pi}^{(T_o)}(\omega) := s_{\pi}^{(T_o(\omega))}(\omega)$, $\omega \in \Omega$,

ist Schadensfunktion zu T_o und

$$g_{K_o}(\pi) = \langle \pi, r(T_o, s^{(T_o)}) \rangle = \mathbb{E}_{\pi}(X_{\pi}^{(T_o)}).$$

Beweis:

$s_{\pi}^{(T_o)}$ ist $\mathcal{K}_{T_o}$-meßbar und nach Konstruktion von $s_{\pi}^{(T_o)}$ gilt:

$X_{\tau}^{(T_o(\omega))}(\omega) = \langle s_{\tau}^{(T_o(\omega))}(\omega), \tau^{(T_o(\omega))}(\omega) \rangle \leq$

$\leq \langle s(\omega), \tau^{(T_o(\omega))}(\omega) \rangle$ für alle $\tau \in \Pi$, $(T_o, s) \in K_o$.

Nach Hilfssatz (5.2) folgt somit:

$\mathbb{E}_{\pi}(X_{\pi}^{(T_o)}) = \langle \pi, r(T_o, s_{\pi}^{(T_o)}) \rangle \leq \langle \pi, r(T_o, s) \rangle$ für alle $(T_o, s) \in K_o$. Damit ist Satz (5.5) bewiesen.

(5.6) Bemerkung:

Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge aller Sequenztests (T, s). Wegen

$\mathbb{E}_{\tau}(X_{\tau}^{(T)}) = \langle \pi, r(T, s_{\tau}^{(T)}) \rangle \leq \langle \pi, r(T, s) \rangle$ für alle $(T, s) \in \mathcal{T}$, $\pi \in \Pi$, reduziert sich das Problem, einen Bayestest bzgl. π in $\mathcal{T}$ zu finden darauf, den $(\mathcal{K}_k)$-adaptierten stochastischen Prozeß $X_{\tau}^{(k)} = \langle s_{\pi}^{(k)}, \tau^{(k)} \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, bzgl. P_{π} optimal zu stoppen.

Im allgemeinen Fall muß man hierzu die Sätze (3.6), (3.7) oder (3.9) anwenden. Dies ist mit den Schwierigkeiten und dem großen Aufwand verbunden, die an dortiger Stelle bereits angesprochen wurden (siehe Bemerkung (3.12)).

Wir interessieren uns deshalb im folgenden für solche Spezialfälle, wo die Theorie des optimalen Stoppens eines Markovprozesses angewendet werden kann.

VI) Sequentielle Testprobleme mit quasi-vollständigen Bindungen.

Wir werden nun spezielle sequentielle Testprobleme behandeln, in denen sich das optimale Stoppen des zugehörigen stoch. Prozesses $(X_\tau^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ vereinfacht. Hierzu werden wir sequentielle Testprobleme mit quasi-vollständigen und vollständigen Bindungen einführen.
Der Begriff 'vollständige Bindung' drängt sich in Analogie zum Begriff eines stochastischen Prozesses mit vollständigen Bindungen auf.
Bemerkung (6.3) wird auf die Beziehung eines sequentiellen Testproblems mit (quasi-)vollständigen Bindungen zu stochastischen Prozessen mit vollständigen Bindungen eingehen.

(6.1) Definition:

Ein sequentielles Testproblem $(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{a_j^{(k)} : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$ heißt 'sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen bzgl. $\tau \in \mathcal{T}$', wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

A1) $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{A}_k := {}^{B}(pr_1, \dots, pr_k) = pr_{1,\dots,k}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \subset \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ $(k \in \mathbb{N})$.

A2) Es sei μ ein σ-finites Maß über $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$. $\mu^k | \mathfrak{A}_k$ sei gegeben durch:

$$\mu^k(pr_{1,\dots,k}^{-1}(B)) := (\bigotimes_{t=1}^{k} \mu)(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Dann besitze P_i auf $\mathfrak{A}_k$ bzgl. μ^k eine Dichte

$$f_i^{(k)}(\omega) = f_i^{(k)}(y_1, \dots, y_k), \quad k \in \mathbb{N}, \ i=1,\dots,n; (\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

(6.2) Bemerkung:

Unter der Voraussetzung A2) ist die Dichte $\tau_i^{(k)}$ von $\tau_i P_i | \mathfrak{A}_k$ bzgl. $P_\tau | \mathfrak{A}_k$ gegeben durch:

$$\tau_i^{(k)}(\omega) = \frac{\tau_i f_i^{(k)}(\omega)}{\sum_{j=1}^{n} \tau_j f_j^{(k)}(\omega)} \qquad P_\tau\text{-f.s.},$$

A3)
Es gelte $\dfrac{\tau_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{j=1}^{n} \tau_j f_j^{(k)}(\omega)} = g_i(z_{k+1}(\omega)) \quad P_\tau\text{-f.s.}$

$(\mathbb{N} \ni k \geq k_0, \ i=1,\dots,n).$

mit geeigneten Funktionen $g_i:(Z, \mathcal{B}(Z)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, $i=1,\ldots,n$, ($Z \subset \mathbb{R}^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$), sowie einer Folge von Funktionen $z_k:(\Omega, \mathcal{A}_k) \longrightarrow (Z, \mathcal{B}(Z))$, $k > k_o$, die mittels einer Übergangsfunktion $U:(Z\times\mathbb{R}, \mathcal{B}(Z\times\mathbb{R})) \longrightarrow (Z, \mathcal{B}(Z))$ und einer Startfunktion $z_{k_o}:(\Omega, \mathcal{A}_{k_o}) \longrightarrow (Z, \mathcal{B}(Z))$ definiert ist durch:

$z_{k+1}(\omega) := U(z_k(\omega), y_{k+1})$, $k \geq k_o$ ($\omega = (y_1, y_2, \ldots) \in \Omega$).

Weiter sei $\sum_{i \leq n} g_i(U(z, \cdot))$ für alle $z \in Z$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. μ.

(Die letzte Forderung ist rein formaler Art. Sie soll gewährleisten, daß $(z_k)_{k \geq k_o}$ jedes $z \in Z$ annehmen kann und somit ein Markovprozeß mit Zustandsraum Z vorliegt).

A4)

Die Schadensbereiche haben für $k > k_o$ die Gestalt

$$S(\omega, k) := \left\{ C_k(\omega) + \alpha^k a_j : j \in J \right\}, \quad k > k_o .$$

Hierbei seien die a_j Schadensvektoren aus $\mathbb{R}_+^n$ ($j \in J \subset \mathbb{N}$).

$S(\omega, k)$ sei 'nach vorne abgeschlossen', d.h.:

Für alle $\pi^* \in \Pi$ existiert $j^* \in J$: $\langle a_{j^*}, \pi^* \rangle = \inf\{\langle a_j, \pi^* \rangle : j \in J\}$.

α ist eine Konstante > 0 und die C_k sind Kostenfunktionen $C_k:(\Omega, \mathcal{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ ($k > k_o$) der Gestalt

$$C_k := \sum_{l=1}^{k} \alpha^l K_l , \quad \text{mit Funktionen } K_l:(\Omega, \mathcal{A}_l) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)),$$

welche die Bedingung erfüllen:

Es existiert eine Funktion $c:(Z, \mathcal{B}(Z)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mit $\mathbb{E}_\pi(K_{l+1} \mid \mathcal{A}_l) = c(z_l)$ für alle $l > k_o$.

Im Fall $\alpha > 1$ gelte $c(z_l) \geq d_o > 0$ für alle $l \geq k_o$, im Fall

$\alpha \leq 1$ gelte $\sum_{l=k_o}^{\infty} \alpha^l c(z_l) = \infty$ P_π-f.s.

Interpretation:

Ein Schadensvektor $a_j^{(k)}(\omega)$ teilt sich für $k > k_0$ auf in ein reines Kostenglied $C_k(\omega)$, das nur von der 'Stichprobe' $\omega \in \Omega$ und der Zeit k abhängt, aber nicht von der Entscheidung, die wir treffen, und einem von $\omega \in \Omega$ und bis auf einen 'Teuerungsfaktor' $\alpha > 0$ auch von der Zeit k unabhängigen Schadensvektor $\alpha^k a_j$, $j \in J$, dessen i-te Komponente $\alpha^k a_{ji}$ den Schaden angibt, den wir erleiden, falls wir uns zum Zeitpunkt k bei Vorliegen der 'wahren Hypothese' P_i $(i=1,\ldots,n)$ für $j \in J$ entscheiden.

(6.3) Bemerkung:

1) Aus A3) folgt, daß $(pr_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_π einen stochastischen Prozeß mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k > k_o}$ bildet. Die bedingte Dichte von pr_{k+1} unter der Bedingung $pr_1, \ldots, pr_k$ ist nämlich gegeben durch:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i f_i^{(k+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i f_i^{(k)}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} g_i \Big)(U(z_k, y_{k+1}), \quad k > k_o$$

2) Bildet andererseits der Prozeß $(pr_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. jedem P_i $(i=1,\ldots n)$ einen stochastischen Prozeß mit vollständigen Bindungen $(z_k^*)_{k > k_o}$, so ist

$$\left(\{P_i\}_{i=1,\ldots,n} ; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}} ; \{C_k + \alpha^k a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}} \right)$$

ein sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen

$z_k := (\pi^{(k)}, z_k^*) : (\Omega, \mathfrak{A}_k) \longrightarrow (\Pi \times Z, \mathfrak{S}(\Pi \times Z)), \quad k > k_o.$

Dies wird im folgenden Abschnitt gezeigt werden, wenn wir sequentielle Testprobleme mit vollständigen Bindungen behandeln werden.

3) Aus der Voraussetzung A3) folgt, daß $(z_k)_{k > k_o}$ eine transitive

Folge von suffizienten Statistiken für $i \in \{1,\dots,n\}$ ist; dies ist ein in der sequentiellen Entscheidungstheorie verwendeter Begriff. (Siehe z.B. ((3)), Seite 329 ff.).

(6.4) Bemerkung:

1) $(z_k)_{k > k_o}$ ist ein Markovprozeß bzgl. P_π . Dies folgt aus Bemerkung (6.3) 1) und Satz (2.2).

2) Sei $G: (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{A}_{k+1}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1)$ P_π -integrabel, dann:

$$\mathbb{E}(G \mid \mathfrak{A}_k) = \int_{\mathbb{R}} G(y_1,\dots,y_k,y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(y_1,\dots,y_{k+1})}{\sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s^{(k)}(y_1,\dots,y_k)} d\mu(y_{k+1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} g_i(z_{k+1}(y_1,\dots,y_{k+1}))\, d\mu(y_{k+1}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} g_i(U(z_k(\cdot), y_{k+1}))\, d\mu(y_{k+1}), \quad (k > k_o).$$

Der folgende Satz stellt nun fest, daß im Fall eines statistischen Testproblems mit quasi-vollständigen Bindungen $(z_k)_{k > k_o}$ bzgl. $\pi \in \Pi$ der Prozeß $(X_\pi^{(k)})_{k > k_o}$ bis auf das Kostenglied C_k eine Funktion des Markovprozesses $(z_k)_{k > k_o}$ ist.

Nach Bemerkung (5.6) ist das Auffinden einer Bayeslösung bzgl. π gleichbedeutend mit dem optimalen Stoppen des Prozesses $(X_\pi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Nach dem Absteigesatz können wir uns auf $(X_\pi^{(k)})_{k > k_o}$ beschränken. Also ist die Suche nach einer Bayeslösung zurückgeführt auf das optimale Stoppen von $(X_\pi^{(k)})_{k > k_o}$. Aufgrund der Voraussetzungen an C_k , $k > k_o$, läßt sich hierbei nun die Theorie des opt. Stoppens eines Markovprozesses anwenden.

(6.5) Satz:

Es sei $(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}; \{C_k + \alpha^k a_j : j\in J\}_{k\in\mathbb{N}})$ ein sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen $(z_k)_{k>k_o}$ bzgl. $\pi\in\Pi$. Dann gilt für $k > k_o$

$$X_\pi^{(k)}(\omega) = C_k(\omega) + \alpha^k v(z_k(\omega)) \quad P_\pi\text{-f.s.}$$

mit $v:(Z,\mathfrak{S}(Z)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathfrak{S}(\mathbb{R}_+))$ definiert gemäß:

$$v(z) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^n a_{ji} \frac{g_i(z)}{\sum_{s=1}^n g_s(z)} : j\in J \right\},\ z\in Z.$$

Beweis:

Nach A4) gilt: $S(\omega,k) = \{C_k + \alpha^k a_j : j\in J\} \subset \mathbb{R}_+^n$, $k > k_o$.

Mithin gilt für $k \geq k_o$:

$$X_\pi^{(k+1)}(\omega) = C_{k+1}(\omega) + \inf\{\alpha^{k+1}\langle a_j, \pi^{(k+1)}\rangle : j\in J\} =$$

$$= C_{k+1}(\omega) + \alpha^{k+1} \inf\left\{ \sum_{i=1}^n a_{ji} \frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{s=1}^n \pi_s f_s^{(k+1)}(\omega)} : j\in J \right\}.$$

Wegen $\sum_{t=1}^n \pi_t f_t^{(k)}(\omega) > 0$ P_π-f.s., können wir mit dieser Summe erweitern. Nach Voraussetzung A3) folgt dann für $k \geq k_o$:

$$X_\pi^{(k+1)} = C_{k+1} + \alpha^{k+1} \inf\left\{ \sum_{i=1}^n a_{ji} \frac{g_i(z_{k+1})}{\sum_{s=1}^n g_s(z_{k+1})} : j\in J \right\} P_\pi\text{-f.s.}$$

Dies ist die Aussage von Satz (6.5).

(6.6) Satz:

$R_\pi : B_+(Z,\mathfrak{S}(Z)) \longrightarrow B_+(Z,\mathfrak{S}(Z))$ sei definiert gemäß:

$$(R_\pi h)(z) := \int_{\mathbb{R}} h(U(z,y)) \sum_{i=1}^n g_i(U(z,y))\, d\mu(y),\quad h\in B_+(Z,\mathfrak{S}(Z)).$$

Dann ist eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \geq k_o+1}$ gegeben durch

$$T_{k_o+1}(\omega) := \inf \{ k_o+1 \leq k \leq \infty : \; v(z_k(\omega)) = v_\infty(z_k(\omega)) \}, \; \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

(Hierbei ist v die in Satz (6.5) definierte Funktion, $v_\infty = \lim v_k$, wobei $v_o := v$, $v_{k+1} := \min(v_o, \alpha(c + R_\pi v_k))$ gemäß Satz (4.11)).

Beweis:

Nach Satz (6.5) gilt $X_\pi^{(k)} = C_k + \alpha^k v(z_k)$, für $k \geq k_o+1$.

Nach Voraussetzung A4) gilt somit für $k \geq k_o+1$:

$$X_\pi^{(k)} = C_{k_o} + \alpha^{k_o} \Big(\sum_{s=1}^{k-k_o} \alpha^s K_{k_o+s} + \alpha^{k-k_o} v(\xi_{k-k_o}) \Big)$$

mit $\xi_s := z_{k_o+s}$ $(s \in \mathbb{N})$.

Eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \geq k_o+1}$ ist, wie man leicht feststellt, gegeben durch $T^*_{k_o+1} := k_o + T^*$, wobei T^* eine optimale Stopzeit des stochastischen Prozesses $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist mit

$$y_k := \sum_{s=1}^{k} \alpha^s K_{k_o+s} + \alpha^k v(\xi_k) \quad , \; k \in \mathbb{N}.$$

$(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz (4.11). Weiter ist R_π der bedingte Erwartungswertoperator des Markovprozesses $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Mithin ist nach Satz (4.11) T^* gegeben durch:

$$T^* = \inf \{ t \in \mathbb{N}: \; v(\xi_t) = v_\infty(\xi_t) \}.$$

Trivialerweise gilt nun: $T_{k_o+1} = T^*_{k_o+1}$ und mithin ist T_{k_o+1} optimal.

Damit ist Satz (6.6) bewiesen.

(6.7) Corollar:

Gilt $k_o = 0$, so ist $T_1 := \inf\{k \in \mathbb{N}: v(z_k) = v_\infty(z_k)\}$ eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_π und somit $(T_1, s^{(T_1)})$ eine Bayeslösung des sequentiellen Testproblems.

Beweis:

Direkte Folgerung aus Satz (6.6) und Bemerkung (5.6).

(6.8) Corollar:

Im Fall $k_o > 0$ sei T_{k_o+1} definiert wie in Satz (6.5), sowie

$$\beta_{k_o+1} := \mathbb{E}_\pi(X_\pi^{(T_{k_o+1})} \mid \mathfrak{A}_{k_o+1}),$$

$$\beta_k := \min(X_\pi^{(k)}, \mathbb{E}_\pi(\beta_{k+1} \mid \mathfrak{A}_k)) \quad \text{für} \quad 1 \le k \le k_o.$$

Dann ist $T_1 := \min(T_{k_o+1}, \inf\{1 \le k \le k_o: \beta_k = X_\pi^{(k)}\})$

eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_π und somit $(T_1, s^{(T_1)})$ eine Bayeslösung des sequentiellen Testproblems.

Beweis:

Die Optimalität von T_1 folgt mit Hilfe des Absteigesatzes (wie bei der Methode der backward induction).

(6.9) Bemerkung:

Gilt speziell $K_{l+1} = c(z_l)$ für $l \ge k_o+1$, so gilt:

$$\beta_{k_o+1} = C_{k_o+1} + \alpha^{k_o+1} v_\infty(z_{k_o+1}) \qquad P_\pi\text{-f.s.}$$

Beweis:

Für $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$X_\pi^{(k_o+s)} = C_{k_o+1} + \alpha^{k_o}\Big(\sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j(\alpha c(\xi_j) + \alpha^s v(\xi_s))\Big),$$

mit $\xi_s := z_{k_o+s}$ $(s \in \mathbb{N})$.

Nach Satz (4.10) wissen wir, daß $(e_s)_{s \in \mathbb{N}}$ mit

$e_s := \sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j (\alpha \cdot c)(\xi_j) + \alpha^s v_\infty(\xi_s)$, $s \in \mathbb{N}$, die

Snell'sche Enveloppe des in der Klammer stehenden stochastischen Prozesses

$x_s := \sum_{j=1}^{s-1} \alpha^j (\alpha \cdot c)(\xi_j) + \alpha^s v(\xi_s)$, $s \in \mathbb{N}$,

ist.

Mithin gilt: $e_1 = \mathbb{E}(x_{T^*} \mid \mathfrak{A}_{k_o+1})$ P_π -f.s. (T^* sei eine optimale Stopzeit von (x_s) bzgl. P_π (und $(\mathfrak{A}_{k_o+s})_{s \in \mathbb{N}}$)).

Wegen $T_{k_o+1} = k_o + T^*$, folgt somit:

$X_\pi^{(T_{k_o+1})} = X_\pi^{(k_o + T^*)} = C_{k_o+1} + \alpha^{k_o} \cdot x_{T^*}$.

Also gilt: $\beta_{k_o+1} = \mathbb{E}_\pi (X_\pi^{(T_{k_o+1})} \mid \mathfrak{A}_{k_o+1}) = C_{k_o+1} + \alpha^{k_o} e_1 =$

$= C_{k_o+1} + \alpha^{k_o+1} v_\infty(z_{k_o+1})$.

Damit ist Bemerkung (6.9) bewiesen.

(6.10) Bemerkung:

1) Voraussetzung A3) gilt im allgemeinen nur für ein einziges $\pi \in \Pi$. Der Fall eines sequentiellen Testproblems mit quasi-vollständigen Bindungen bzgl. $\pi \in \Pi$, welches kein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen ist (diese werden im folgenden Abschnitt behandelt) mag vorkommen, doch erscheint die Konstruktion eines Beispiels als gekünstelt.
2) Andererseits ist es in manchen Fällen günstiger (in Bezug auf den Rechenaufwand), ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen als sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen aufzufassen. Wir werden im folgenden Abschnitt darauf noch etwas näher eingehen.

VII) Sequentielle Testprobleme mit vollständigen Bindungen.

(7.1) Definition:

Ein sequentielles Testproblem

$(\{P_i\}_{i=1,\dots,n} ; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}} ; \{C_k + \alpha^k a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$

heißt 'sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k > k_o}$ $(k_o \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

A1) und A2): Es gelten die Voraussetzungen A1) und A2) der Definition eines sequentiellen Testproblems mit quasi-vollständigen Bindungen.

A3'):

Es gelte $f_i^{(k+1)}(\omega) = f_i^{(k)}(\omega)\, g_i^*(z_k(\omega), y_{k+1})$ für alle $k \geq k_o$, $i = 1, \dots, n$; $\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

mit geeigneten Funktionen $g_i^* : (Z \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(Z \times \mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$

(hierbei sei $Z \subset \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ für ein $\tilde{I} \in \mathbb{N}$), sowie einer Folge von Funktionen $z_k : (\Omega, \mathfrak{A}_k) \longrightarrow (Z, \mathfrak{B}(Z))$, $k > k_o$, die mittels einer Übergangsfunktion $U : (Z \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(Z \times \mathbb{R})) \longrightarrow (Z, \mathfrak{B}(Z))$ und einer Startfunktion $z_{k_o} : (\Omega, \mathfrak{A}_{k_o}) \longrightarrow (Z, \mathfrak{B}(Z))$ definiert ist durch: $z_{k+1}(\omega) := U(z_k(\omega), y_{k+1})$, $k \geq k_o$, $\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \Omega$.

Weiter sei $g_i^*(z, \cdot)$ eine W-Dichte bzgl. μ für alle $z \in Z$

A4':

Die Menge der Schadensvektoren $\{a_j \in \mathbb{R}_+^n : j \in J\}$ sei nach vorne abgeschlossen. $\alpha > 0$.

Die Kostenfunktionen $C_k : (\Omega, \mathfrak{A}_k) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$ haben für $k > k_0$ die Gestalt:

$$C_k \sum_{l=1}^{k} \alpha^l K_l .$$

mit Funktionen $K_l : (\Omega, \mathfrak{A}_l) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$, welche die Bedingungung erfüllen:

Es existiert eine Funktion $c : (\Pi \times Z, \mathfrak{B}(\Pi \times Z)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+))$

mit $\mathbb{E}_i(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(\pi^{(l)}, z_l)$ für alle $l \geq k_o$, $i=1,\ldots,n$.

Im Fall $\alpha > 1$ gelte $c(\pi^{(l)}, z_l) \geq d_o > 0$ für alle $l > k_o$, im Fall $\alpha \leq 1$ gelte $\sum_{l \geq k_o} \alpha^l c(\pi^{(l)}, z_l) = \infty$ P_i-f.s. $(i=1,\ldots,n)$.

(7.2) Satz:

Ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k > k_o}$ ist ein sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen $(z_k^*)_{k > k_o}$ mit $z_k^* := (\pi^{(k-1)}, z_{k-1}, y_k) \in \Pi \times Z \times \mathbb{R} =: Z^*$ bzgl. jedem $\pi \in \Pi$.

Beweis:

Es ist $Z^* \subset \mathbb{R}^{n+1+1}$. Wir definieren die Übergangsfunktion $U^* : Z^* \times \mathbb{R} \longrightarrow Z^*$ gemäß:

$$U^*((\pi, z, y), u) := \begin{cases} ((\pi \circ g^*(z,y))_e, U(z,y), u), & \text{falls } \pi \circ g^*(z,y) \neq 0 \\ (\pi, z, y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

($x_e := x/|x|$ für $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$ mit $|x| := |x_1| + \ldots + |x_m|$).

Dann ist U^* $\mathfrak{B}(Z^* \times \mathbb{R})$ - $\mathfrak{B}(Z^*)$ - meßbar und nach A4') gilt:

$$\pi^{(k+1)}(\omega) = (\pi \circ f^{(k+1)}(\omega))_e = (\pi \circ f^{(k)}(\omega) \circ g^*(z_k(\omega), y_{k+1}))_e$$

$$= ((\pi \circ f^{(k)}(\omega))_e \circ g^*(z_k(\omega), y_{k+1}))_e = (\pi^{(k)}(\omega) \circ g^*(z_k(\omega), y_{k+1}))_e$$

(*)

(P_π-f.s., $k \geq k_o$), für alle $\pi \in \Pi$.

Die Gleichung (*) ergibt sich aus der Beziehung: $(x \circ y)_e = (x_e \circ y)_e$, falls $x \circ y \neq 0$.

Für $k \geq k_o$ gilt nun:

$$z^*_{k+1}(\omega) = (\pi^{(k)}(\omega), z_k(\omega), y_{k+1}) =$$

$$= ((\pi^{(k-1)}(\omega) \circ g^*(z_{k-1}(\omega), y_k))_e, U(z_{k-1}(\omega), y_k), y_{k+1})$$

$$\overset{(*)}{=} U^*((\pi^{(k-1)}, z_{k-1}(\omega), y_k), y_{k+1}) = U^*(z^*_k(\omega), y_{k+1})$$

P_π -f.s. für alle $\pi \in \Pi$.

Die Gleichung (*) gilt deshalb, weil für alle $\pi \in \Pi$ für P_π -fast alle $\omega = (y_1, y_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt: $\pi^{(k-1)}(\omega) \circ g^*(z_{k-1}(\omega), y_k) \neq 0$.

Hiermit hat man nun für $g_i(\pi, z, y) := \pi_i g^*_i(z, y)$, $(\pi, z, y) \in Z^*$:

$$\frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i f_i^{(k)}(\omega)} = \frac{\pi_i f_i^{(k)}(\omega)\, g^*_i(z_k(\omega), y_{k+1})}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j f_j^{(k)}(\omega)} =$$

$$= g_i(\pi^{(k)}(\omega), z_k(\omega), y_{k+1}) = g_i(z^*_{k+1}(\,)).$$

Weiter ist, wie man leicht feststellt, $\sum_{i \leq n} g_i(U^*(z^*, \cdot))$ für

für jedes $z^* \in Z^*$ eine

Also ist A3) erfüllt.

Um A4) nachzuweisen, setzen wir für $(\pi, z, y) \in \Pi \times Z \times \mathbb{R} = Z^*$:

$$V^*(\pi, z, y) := \begin{cases} ((\pi \circ g^*(z, y))_e, U(z, y)), & \text{falls } \pi \circ g^*(z, y) \neq 0 \\ (\pi, z) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$V^*: Z^* \longrightarrow \Pi \times Z$ ist $\mathcal{B}(Z^*) - \mathcal{B}(\Pi \times Z)$ - meßbar.

Für alle $l > k_o$ und alle i n gilt nun nach dem ersten Beweisschritt:

$$\mathbb{E}_i(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(\pi^{(l)}, z_l) = c(V^*(\pi^{(l-1)}, z_{l-1}, y_l)) = c(V^*(z^*_l))$$

Mithin gilt auch $\mathbb{E}_\pi(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(V^*(z^*_l))$ für alle $\pi \in \Pi$, $l > k_o$.

Hiermit ist A4) nachgewiesen für alle $\pi \in \Pi$.

Um eine optimale Stopzeit von $(X^{(k)}_\pi)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_π zu finden, könnte man also Satz (6.6) anwenden. Die direkte Zurückführung auf diesen Satz erweist sich allerdings als äußerst umständlich. Wir wollen deshalb das optimale Stoppen von $(X^{(k)}_\pi)_{k > k_o}$ von neuem herleiten.

(7.3) Definition:

a) $Q: B_+(\mathcal{T} \times Z) \longrightarrow B_+(\mathcal{T} \times Z)$ sei definiert gemäß:

$$Qh(\pi, z) := \int_{\mathbb{R}} h\Big((\pi \circ g^*(z,y))_e \,,\; U(z,y) \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, g_i^*(z,y) \Big) \mu(dy),$$

für $h \in B_+(\mathcal{T} \times Z)$.

(Qh ist eindeutig definiert, denn sei m das W-maß mit der μ-Dichte $\sum_{i \le n} \pi_i \, g_i^*(z, \cdot)$, dann ist der Integrand m-f.ü. definiert).

b) Für $h \in B_+(\mathcal{T} \times Z)$ sei $h_k^* \in B_+(\mathcal{T} \times Z)$, $k \geq 0$, definiert durch:

$h_o^* := h$; $h_{k+1}^* := \min(h\,;\, \alpha \cdot (c + Qh_k^*))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Weiter sei $h_\infty^* := \inf\{h_k^* : k \in \mathbb{N}\} = \lim_{k \to \infty} h_k^*$.

($\alpha > 0$ und $c: \mathcal{T} \times Z \longrightarrow \mathbb{R}_+$ gemäß allgemeiner Voraussetzung).

(7.4) Hilfssatz:

a) Sei $G: (\Omega, \mathcal{A}_{k+1}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ P_π-integrabel, dann gilt für $k > k_o$:

$$\mathbb{E}_\pi(G \mid \mathcal{A}_k) = \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(k)}(\omega) \, g_i^*(z_k(\omega), y_{k+1}) \, \mu(dy_{k+1})$$

b) Sei $h \in B_+(\mathcal{T} \times Z)$ und $G := h(\pi^{(k+1)}, z_{k+1})$, $(k > k_o)$.

Dann gilt: $\mathbb{E}_\pi(G \mid \mathcal{A}_k) = Qh(\pi^{(k)}, z_k)$.

Beweis:

a) $$\mathbb{E}(G \mid \mathcal{A}_k) = \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \, \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i \, f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{s=1}^{n} \pi_s \, f_s^{(k)}(\omega)} \, \mu(dy_{k+1}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi_i \, f_i^{(k)}(\omega) \, g_i^*(z_k(\omega), y_{k+1})}{\sum_{s=1}^{n} \pi_s \, f_s^{(k)}(\omega)} \, \mu(dy_{k+1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(\cdot, y_{k+1}) \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(k)}(\omega)\, g_i^*(z_k(\omega), y_{k+1})\, \mu(dy_{k+1}) .$$

b) $\mathbb{E}_\pi(G \mid \mathfrak{A}_k) = \mathbb{E}_\pi(h(\pi^{(k+1)}, z_{k+1}) \mid \mathfrak{A}_k) =$

$$= \mathbb{E}_\pi\big(h\big((\pi^{(k)} \circ g^*(z_k, y_{k+1}))_e, U(z_k, y_{k+1})\big) \mid \mathfrak{A}_k\big) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h\big((\pi^{(k)} \circ g^*(z_k, y_{k+1}))_e, U(z_k, y_{k+1})\big) \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(k)} g_i^*(z_k, y_{k+1})\, \mu(dy_{k+1})$$

$$= Qh(\pi^{(k)}, z_k) .$$

(7.5) Satz:

Sei $(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{C_k + \alpha^k a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$ ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k \geq k_o}$. Dann gilt für $k > k_o$:

I) $X_\pi^{(k)} = C_k + \alpha^k v(\pi^{(k)}, z_k)$ P_π-f.s., für alle $\pi \in \Pi$,

wobei $v \in B_+(\Pi \times Z)$ gegeben ist durch:

$$v(\pi, z) := \inf\{\langle a_j, \pi \rangle : j \in J\}, \quad (\pi \in \Pi,\ z \in Z).$$

II) Sei $(\xi_s)_{s \in \mathbb{N}}$ der Markovprozeß $\xi_s := (\pi^{(k_o+s)}, z_{k_o+s})$, $s \in \mathbb{N}$, dann läßt sich $X_\pi^{(k)}$ für $k > k_o$ P_π-fs schreiben als:

$$X_\pi^{(k)} = C_{k_o} + \alpha^{k_o}\Big(\sum_{s=1}^{k-k_o} \alpha^s K_{k_o+s} + \alpha^{k-k_o} v(\xi_{k-k_o})\Big)$$

mit $\mathbb{E}_\pi(K_{k_o+s+1} \mid \mathfrak{A}_{k_o+s}) = c(\xi_s)$, $s \in \mathbb{N}$.

III) Eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \geq k_o+1}$ bzgl. P_π ist gegeben durch:

$$T_{k_o+1} := \inf\{k_o+1 \leq k \leq \infty : v(\pi^{(k)}, z_k) = v_\infty^*(\pi^{(k)}, z_k)\}$$

für alle $\pi \in \Pi$.

Beweis:

I) Folgt sofort aus der Definition von $(X_\pi^{(k)})$.

II) Ergibt sich aus I) und der Voraussetzung A4).

III) Der Beweis hierfür läuft vollständig analog zum Beweis von Satz (6.6), wie man aus der Darstellung in II) sieht. Man beachte, daß wegen (7.4)b Q der bedingte Erwartungswertoperator des Markovprozesses (ξ_s) ist. Man beachte weiterhin, daß die 'Stopfunktion' v_∞^* unabhängig von der Bayes-Vorbewertung π stets die gleiche Funktion ist wegen unserer Forderung $\mathbb{E}_i(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(\pi^{(1)}, z_l)$ für alle $i=1,\dots,n$, $l > k_o$. Mithin ist $\mathbb{E}_\pi(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(\pi^{(1)}, z_l)$ unabhängig von π, für alle $l > k_o$.

(7.7) Satz:

Sei $c: \Pi \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ konkav in π bei festem z. Dann gilt:

$v_\infty^* : \Pi \times Z \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist konkav in $\pi \in \Pi$ bei festem $z \in Z$.

Beweis:

a) Wir zeigen durch Induktion:

(*): $v_k^*(\pi, z)$ ist konkav in π bei festem z, für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis:

1) $v_o^* := v = \inf\{\langle a_j, \pi\rangle : j \in J\}$ ist unabhängig von z und als Infimum konkaver Funktionen konkav in π.

2) Sei v_k^* konkav in π bei festem z, $(k \geq 0)$.
Sei $\beta \in (0,1)$, π' und $\pi'' \in \Pi$, $z \in Z$:
Wir definieren einige Hilfsgrößen:

$$\beta_1(y) := \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \pi_i' \, g_i^*(z,y)}{\beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \pi_i' \, g_i^*(z,y) + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} \pi_i'' \, g_i^*(z,y)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$\beta_2(y) := \frac{(1-\beta)\sum_{i=1}^{n} \pi_i'' \, g_i^*(z,y)}{\beta \sum_{i=1}^{n} \pi_i' \, g_i^*(z,y) + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n} \pi_i'' \, g_i^*(z,y)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $0 \leq \beta_i(y) \leq 1$, $i=1,2$ und $\beta_1(y) + \beta_2(y) = 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Weiter sei $m'|\mathcal{S}_1$ bzw. $m''|\mathcal{S}_1$ das W-maß auf $\mathcal{S}_1$ mit der μ-Dichte $f' := \sum_{i \leq n} \pi_i' \, g_i^*(z, \cdot)$ bzw. $f'' := \sum_{i \leq n} \pi_i'' \, g_i^*(z, \cdot)$.

Dann ist $(m' + m'')(\{f'=0, f''=0\}) = 0$; $m'(\{f'=0\}) = m''(\{f''=0\}) = 0$.

Weiter gilt natürlich: $f'(y) = 0 \iff \pi' \circ g^*(z,y) = 0$ und $f''(y) = 0 \iff \pi'' \circ g^*(z,y) = 0$. Hiermit ergibt sich:

$$Qv_k^*(\beta\pi' + (1-\beta)\pi'', z) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} v_k^*\Big(\frac{(\beta\pi' + (1-\beta)\pi'') \circ g^*(z,y)}{\beta f'(y) + (1-\beta) f''(y)}, U(z,y) \Big)(\beta m' + (1-\beta)m'')(dy)$$

$$= \int_{\{f'=0\}\{f''\neq 0\}} v_k^*\Big(\frac{\pi'' \circ g^*(z,y)}{f''(y)}, U(z,y)\Big) (1-\beta)\, m''(dy) +$$

$$+ \int_{\{f''=0\}\{f'\neq 0\}} v_k^*\Big(\frac{\pi' \circ g^*(z,y)}{f'(y)}, U(z,y)\Big) \beta\, m'(dy) +$$

$$+ \int_{\{f'\neq 0\}\{f''\neq 0\}} v_k^*\Big(\beta_1(y) \frac{\pi' \circ g^*(z,y)}{f'(y)} + \beta_2(y) \frac{\pi'' \circ g^*(z,y)}{f''(y)}, U(z,y)\Big) \cdot$$

$$\cdot (\beta m' + (1-\beta)m'')(dy) =: I_1 + I_2 + I_3 \qquad \geqslant \ (v_k^* \text{ konkav})$$

$$\geqslant I_1 + I_2 + \int_{\{f'\neq 0\}\{f''\neq 0\}} \Big\{ \beta_1(y)\, v_k^*\Big(\frac{\pi' \circ g^*(z,y)}{f'(y)}, U(z,y)\Big) +$$

$$+ \beta_2(y)\, v_k^*\Big(\frac{\pi'' \circ g^*(z,y)}{f''(y)}, U(z,y)\Big)\Big\} (\beta m' + (1-\beta)m'')(dy) =$$

$$= (1-\beta) \int\limits_{\{f'=0\}\{f''\neq 0\}} v_k^*\left(\frac{\pi''\circ g^*(z,y)}{f''(y)},\ U(z,y))\cdot f''(y)\right) \mu(dy) +$$

$$+ \beta \int\limits_{\{f'\neq 0\}\{f''=0\}} v_k^*\left(\frac{\pi'\circ g^*(z,y)}{f'(y)},\ U(z,y))\cdot f'(y)\right) \mu(dy) +$$

$$+ \beta \int\limits_{\{f'\neq 0\}\{f''\neq 0\}} v_k^*\left(\frac{\pi'\circ g^*(z,y)}{f'(y)},\ U(z,y))\cdot f'(y)\right) \mu(dy) +$$

$$+(1-\beta) \int\limits_{\{f'\neq 0\}\{f''\neq 0\}} v_k^*\left(\frac{\pi''\circ g^*(z,y)}{f''(y)},\ U(z,y))\cdot f''(y)\right) \mu(dy) =$$

$$= \beta \int\limits_{\mathbb{R}} v_k^*\left(\frac{\pi'\circ g^*(z,y)}{f'(y)},\ U(z,y))\cdot f'(y)\right) \mu(dy) +$$

$$(1-\beta) \int\limits_{\mathbb{R}} v_k^*\left(\frac{\pi''\circ g^*(z,y)}{f''(y)},\ U(z,y))\cdot f''(y)\right) \mu(dy) =$$

$$= \beta\, Qv_k^*(\pi', z) + (1-\beta)\, Qv_k^*(\pi'', z).$$

Mithin ist $Qv_k^*(\cdot, z)$ konkav; dann ist aber auch $v_{k+1}^*(\cdot, z) =$ $= \min(v(\cdot, z), \alpha(c(\cdot, z) + Q v_k^*(\cdot, z)))$ konkav, da nach Voraussetzung $c(\cdot, z)$ konkav ist.

Somit ist (*) bewiesen.

b) $v_\infty^*(\cdot, z) = \inf\{v_k^*(\cdot, z) : k \in \mathbb{N}\}$ ist als Infimum konkaver Funktionen ebenfalls konkav.

Damit ist Satz (7.7) bewiesen.

(7.8) Bemerkung:

Konkavitätsaussagen wie in Satz (7.7) sind in der Theorie der Sequenztests nicht neu. So spielt z.B. in der Bayes'schen Formulierung des Waldschen Sequenztests eine zu Satz (7.7) analoge Aussage eine wichtige Rolle (siehe hierzu Satz (8.3)). Der obige Beweis orientiert sich

an einem Beweis dieses Satzes für unabhängige Wiederholungen in der Diplomarbeit von R. Rhiel.

Auch die folgenden drei Sätze und deren Beweise orientieren sich an analogen Aussagen, die von R. Rhiel in seiner Diplomarbeit für den Spezialfall konstanter Kosten und zeitlich und örtlich homogener Markovprozesse gemacht wurden:

(7.9) Satz:

1) $v(\cdot, z): \overline{\Pi} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ist konkav und stetig $(z \in Z)$.

2) Ist $c(\cdot, z): \overline{\Pi} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ konkav und stetig $(z \in Z)$, so ist auch $v^*_\infty(\cdot, z): \overline{\Pi} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ konkav und stetig $(z \in Z)$.

Beweis:

Sei $z \in Z$ gegeben.

1) $v(\cdot, z) = \inf\{\langle a_j, \cdot \rangle : j \in J\}$ ist konkav und mithin unterhalb stetig. Als Infimum stetiger Funktionen ist $v(\cdot, z)$ andererseits oberhalb stetig. Hieraus folgt die Stetigkeit von $v(\cdot, z)$.

2) Da $c(\cdot, z)$ konkav ist, folgt nach Satz (7.7) die Konkavität von $v^*_\infty(\cdot, z)$. Folglich ist $v^*_\infty(\cdot, z)$ unterhalb stetig.
Um die Stetigkeit von $v^*_\infty(\cdot, z)$ nachzuweisen, genügt es also, zu zeigen, daß $v^*_k(\cdot, z)$ stetig ist für jedes $k \in \mathbb{N}$, denn dann ist $v^*_\infty(\cdot, z)$ als Infimum stetiger Funktionen oberhalb stetig.

Beh.: $v^*_k(\cdot, z)$ ist stetig, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Beweis: (durch Induktion)

Beh. ist nach Teil 1) richtig für $k = 0$.

Sei $v^*_k(\cdot, z)$ stetig für ein $k \geq 0$. Dann gilt:

$$Qv^*_k(\pi, z) = \int_{\mathbb{R}} v^*_k((\pi \cdot g^*(z,y))_e, U(z,y)) \sum_{i=1}^{n} \pi_i g^*_i(z,y) \, \mu(dy)$$

ist stetig in $\pi \in \Pi$ (bei festem $z \in Z$), denn der Integrand hängt bei festem $(z,y) \in Z \times \mathbb{R}$ stetig von π ab (definiere formal

$(\tau \cdot g^*(z,y))_e := \tau$, falls $\tau \cdot g^*(z,y) = 0$, damit der Integrand überall definiert ist); weiterhin ist der Integrand durch

$\sum_{i=1}^{n} g_i^*(z,\cdot)$ gleichmäßig μ-integrabel nach oben beschränkt.

Da nach Voraussetzung $c(\cdot,z)$ stetig ist, folgt somit:

$v_{k+1}^*(\cdot,z) = \min(v(\cdot,z), \alpha\cdot(c(\cdot,z) + Qv_k^*(\cdot,z))$ ist stetig.

Damit ist die Behauptung und auch Satz (7.9) bewiesen.

(7.10) Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen von Satz (7.9) konvergiert nach dem Satz von DINI für festes $z \in Z$ $v_k^*(\cdot,z)$ gleichmäßig auf Π gegen $v_\infty^*(\cdot,z)$.

(7.11) Satz:

Es sei $c: \Pi \times Z \longrightarrow \mathbb{R}_+$ bei festem $z \in Z$ stetig und konkav in $\pi \in \Pi$. Es gelte $a_j \neq a_{j'}$ für $j \neq j' \in J$.

Es sei $A_z := \{\pi \in \Pi: v(\pi,z) = v_\infty^*(\pi,z)\}$, $z \in Z$.

Dann gilt: $A_z = \bigcup_{j \in J} A_z^{(j)}$, wobei die $A_z^{(j)} \subset \Pi$ konvex und abgeschlossen sind und $A_z^{(j)} \cap A_z^{(j')}$ höchstens in einem (n-2)-dimensionalen affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ liegt, $j \neq j' \in J$.

Beweis: Sei $z \in Z$ gegeben.

Definiere: $B_j := \{\pi \in \Pi: v(\pi,z) = \langle a_j, \pi \rangle\}$, $j \in J$.

B_j ist klarerweise abgeschlossen und aus der Konkavität von $v(\cdot,z)$ und der Linearität von $\langle a_j, \cdot \rangle$ folgt die Konvexität von B_j, $j \in J$.

Weiter ist $B_j \cap B_{j'} \{\pi \in \Pi: \langle a_j, \pi \rangle = \langle a_{j'}, \pi \rangle\}$ für $a_j \neq a_{j'}$, eine Teilmenge eines (n-2)-dimensionalen affinen Teilraums des $\mathbb{R}^n$.

Setze nun $A_z^{(j)} := A_z \cap B_j$, $j \in J$. $A_z^{(j)}$ ist abgeschlossen.

Es ist $A_z^{(j)} = \{\pi \in \Pi: v_\infty^*(\pi,z) = \langle a_j, \pi \rangle\}$. Wie oben folgt aus der Konkavität von $v_\infty^*(\cdot,z)$ und der Linearität von $\langle a_j, \cdot \rangle$ die Konvexität von $A_z^{(j)}$.

(7.12) Bemerkung:

Die Aussage von Satz (7.11) ist eigentlich nur dann von besonderem Interesse, wenn v^*_∞ (und damit auch A_z) nicht von $z \in Z$ abhängt und J endlich ist.

(7.13) Bemerkung:

Wir wollen noch einmal auf Bemerkung (6.10) 2) zurückkommen:

Es mag in manchen Fällen günstig sein, ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen als ein sequentielles Testproblem mit quasi-vollständigen Bindungen aufzufassen.

Dazu das folgende Beispiel:

Es sei P_i die gemeinsame Verteilung einer Folge unabhängiger exponentiell mit Erwartungswert β_i verteilter reeller Zufallsvariablen, $i=1,\dots,n$.

Sei $\mu \mid \mathfrak{B}_1$ definiert durch: $\mu(A) := \lambda(A \cap [0,\infty))$, $A \in \mathfrak{B}_1$.

Weiter sei der Einfachheit halber $C_k = kc$, mit einer positiven Konstanten c.

Dann ist, wie man leicht sieht, $(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}; \{kc + a_j : j \in J\}_{k\in\mathbb{N}})$ ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$.

v^*_∞ ist somit eine Funktion von $\pi \in \Pi$.

Andererseits gilt:

$$\left(\frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{s\le n} \pi_s f_s^{(k)}(\omega)}\right)^{-1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\pi_s \beta_s^k}{\pi_i \beta_i^{k+1}} \exp\Big(\beta_i y_{k+1} - (\beta_s - \beta_i)\sum_{s=1}^{k} y_k\Big)$$

$(\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, μ^{k+1}-f.ü.

Mithin ist das obige Testproblem auch eines mit quasi-vollständigen Bindungen $(\tilde{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{z}_k := (k, \sum_{s\le k} y_s, y_{k+1}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}^2 =: Z$, $k \in \mathbb{N}$,

sowie der Übergangsfunktion $U((k,x,y),u) := (k+1, x+y, u)$, $k \in \mathbb{N}$, $x,y,u \in \mathbb{R}$. v_∞ ist somit eine Funktion von $(k,x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}^2$.

Man erreicht also bei großem n eine nicht unerhebliche Einsparung an unabhängigen Variablen, wenn man zu quasi-vollständigen Bin-

dungen übergeht; es mag dann aufwendiger sein, die Funktion $v^*_\infty(\pi)$ zu berechnen als die Schar $v_\infty(k, \cdot, \cdot)$, $k \in \mathbb{N}$.

VIII) Unabhängige Wiederholungen und zeitlich homogene Markovprozesse.

In diesem Abschnitt sei J endlich, $c: \Pi \longrightarrow \mathbb{R}_+$ stetig und konkav. Weiter gelte: $C_k = \sum_{l \leq k} K_l$ mit $\mathbb{E}_i(K_{l+1} \mid \mathfrak{A}_l) = c(\pi^{(l)})$, $l > o$, sowie $c(\pi^{(l)}) \geq d_o > 0$, falls $\alpha > 1$ und $\sum_{l=1}^{\infty} \alpha^l c(\pi^{(l)}) = \infty$, falls $\alpha \leq 1$. (i=1,...,n).
Somit ist sicherlich A4') erfüllt.

(8.1) Bezeichnungen:

a) Wir nennen ein sequentielles Testproblem

$$(\{P_i\}_{i=1,\dots n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{C_k + \alpha^k a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$$

kurz den 'Wald'schen Fall' (von unabhängigen Wiederholungen), wenn die Hypothesen $P_1, \dots, P_n$ die Produktwahrscheinlichkeiten $p_1^{\mathbb{N}}, \dots, p_n^{\mathbb{N}}$ über $\mathfrak{L}_1^{\mathbb{N}}$ von W-maßen $p_1, \dots, p_n$ über $\mathfrak{L}_1$ sind.

b) Wir nennen ein sequentielles Testproblem

$$(\{P_i\}_{i=1,\dots,n}; \{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{C_k + \alpha^k a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}})$$

kurz den Markov'schen Fall, wenn die Hypothesen $P_1, \dots, P_n$ die Verteilungen von zeitlich homogenen, in $y_o \in \mathbb{R}$ startenden Markovprozessen $(\xi_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ (i=1,...,n) mit Übergangsdichten $q_i: \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. μ , i=1,...,n , sind.

(8.2) Bemerkung:

1) Für $C_k = kc$, mit einer positiven Konstanten c, $n = 2$, $J = \{1,2\}$ und $\alpha = 1$ stellt der Fall a) den klassischen Wald'schen Sequenztest dar (siehe z.B. ((18)), ((3))), deshalb die Bezeichnung 'Wald'scher Fall' .

2) R. Rhiel hat in seiner Diplomarbeit ((14)) die beiden obigen Fälle behandelt. Unter den Voraussetzungen $C_k = kc$, mit einer positiven Konstanten c, $J = \{1,\dots,n\}$ und $\alpha = 1$, stimmen seine Ergebnisse mit den unseren in diesem Abschnitt überein. In diesem Abschnitt wollen wir also im wesentlichen schon bekannte Ergebnisse mit unseren Mitteln reproduzieren und ein wenig verallgemeinern.

(8.3) Bezeichnungen:

Sei $v_0(\pi) := \min\{\langle a_j, \pi\rangle : j \in J\}$, $\pi \in \Pi$.

a) Im Wald'schen Fall sei $W: B_+(\Pi) \longrightarrow B_+(\Pi)$ definiert durch:

$$Wh(\pi) := \min\Big(v_0(\pi), \alpha\big(c(\pi) + \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e)\Big(\sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y)\Big)\,\mu(dy)\Big).$$

($h \in B_+(\Pi)$, $\pi \in \Pi$).

b) Im Markov'schen Fall sei $M: B_+(\Pi \times \mathbb{R}) \longrightarrow B_+(\Pi \times \mathbb{R})$ definiert durch:

$$Mh(\pi, z) := \min\Big(v_0(\pi), \alpha\big(c(\pi) + \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ q(z,y))_e, y)\Big(\sum_{s=1}^{n} \pi_s q_s(z,y)\Big)\,\mu(dy)\Big)$$

($h \in B_+(\Pi \times \mathbb{R})$, $\pi \in \Pi$, $z \in \mathbb{R}$).

(8.4) Satz:

a) Der Wald'sche Fall ist ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $z_k \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Eine optimale Stopzeit von $(X_{\pi}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_{π} ist gegeben durch $T_W := \inf\{k \in \mathbb{N}: \pi^{(k)} \in A\}$, wobei die Stopmenge $A \subset \Pi$ gegeben ist durch: $A = \{\pi \in \Pi: v_0(\pi) = \lim_{t \to \infty} W^t v_0(\pi)\}$.

Weiter gilt: $A = \bigcup_{j \in J} A^{(j)}$, mit $A^{(j)} \subset \Pi$ konvex und abgeschlossen und $A^{(j)} \cap A^{(j')}$ ist für $a_j \neq a_{j'}$ höchstens in einem (n-2)-dimensionalen affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten.

b) Der Markov'sche Fall ist ein sequentielles Testproblem mit vollständigen Bindungen $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, mit $z_k(\omega) = y_k$, $k \in \mathbb{N}$ $(\omega = (y_1, y_2, \ldots))$.

Eine optimale Stopzeit von $(X_{\pi}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_{π} ist gegeben durch: $T_M := \inf\{k \in \mathbb{N}: \pi^{(k)} \in A(y_k)\}$, wobei $A(z) \subset \Pi$, $z \in \mathbb{R}$, gegeben ist durch: $A(z) := \{\pi \in \Pi: v_0(\pi) = \lim_{t \to \infty} M^t v_0(\pi, z)\}$, $z \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt: $A(z) = \bigcup_{j \in J} A(z)^{(j)}$, $z \in \mathbb{R}$, mit $A(z)^{(j)}$ konvex und abgeschlossen, $j \in J$.

c) Sind die Markovprozesse im Markov'schen Fall auch noch örtlich homogen, d.h. gilt $\mu = \lambda$ und $q_i(z, y) = q_i^*(z-y)$ mit gewissen Wahrscheinlichkeitsdichten q_i^* bzgl. λ, $i=1, \ldots, n$, so ist $A(z)$ nicht von $z \in \mathbb{R}$ abhängig und die optimale Stopzeit ist nur eine Funktion der a-posteriori-Bewertung $\pi^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. (Wir nennen diesen Fall kurz den 'Random-walk Fall', denn die Hypothesen $P_1, \ldots, P_n$ sind genau die gemeinsamen Verteilungen von $\xi_{ik} := \sum_{t \leq k} \zeta_{it}$, mit $\zeta_{it} := (\xi_{it} - \xi_{i(t-1)})$, $t \in \mathbb{N}$, $(\xi_{i0} := y_0)$, wobei die $(\zeta_{it})_{t \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit gemeinsamer Lebesgue-Dichte q_i^* $(i=1, \ldots, n)$.)

Beweis:

Zunächst ist klar, daß A1), A2) und A4') erfüllt sind, da dies generell vorausgesetzt wurde.

a) Sei f_i die Dichte von p_i bzgl. μ, $i=1,\dots,n$.

Dann ist $f_i^{(k)}(\omega) = f_i(y_1) \cdot \dots \cdot f_i(y_k)$, $\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

und somit $f_i^{(k+1)}(\omega) = f_i^{(k)}(\omega)\, f_i(y_{k+1})$.

Definiere also $g_i^*(z,y) := f_i(y)$; $Z := \{1\}$, $U: Z \times \mathbb{R} \longrightarrow Z$,

$U(1,y) := 1$; Mit diesen Definitionen ist A3') erfüllt (für $k_o = o$).

Im Wald'schen Fall ist der bedingte Erwartungswertoperator Q gegeben durch:

$$Qh(\pi) = \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e) \Big(\sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y)\Big)\, \mu(dy), \quad h \in B_+(\Pi).$$

Nach Definition gilt dann: $v_\infty^* = \lim_{t \to \infty} W^t v_o$. Hieraus folgen in einfacher Weise die weiteren Behauptungen. Die Zerlegung von A folgt aus Satz (7.11).

b) Es gilt: $f_i^{(k)}(\omega) = q_i(y_o, y_1) \cdot \dots \cdot q_i(y_{k-1}, y_k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$(\omega = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, und somit ist A3') erfüllt, wenn man setzt: $Z := \mathbb{R}$, $U: Z \times \mathbb{R} \longrightarrow Z$ mit $U(z,y) := y$; $z_o := y_o \in \mathbb{R} = Z$, sowie $g_i^*(z,y) := q_i(z,y)$, $i=1,\dots,n$.

Im Markov'schen Fall ist der bedingte Erwartungswertoperator Q gegeben durch:

$$Qh(\pi, z) = \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ q(z,y))_e, y) \Big(\sum_{s=1}^{n} \pi_s q_s(z,y)\Big)\, \mu(dy),$$

$(h \in B_+(\Pi \times \mathbb{R}), \pi \in \Pi)$.

Hieraus folgen die weiteren Behauptungen aus Satz (7.5) und Satz (7.11).

c) Im Random Walk Fall ist Qh unabhängig von z, wenn h unabhängig von z ist, denn für $h \in B_+(\Pi)$ gilt:

$$Qh(\pi, z) = \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ q^*(z-y))_e) \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s q_s^*(z-y)\right) \lambda(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ q^*(u))_e) \left(\sum_{s=1}^{n} \pi_s q_s^*(u)\right) \lambda(du) ,$$

wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-maßes .

Mithin ist auch v_∞^* unabhängig von z. Hieraus folgen in einfacher Weise die weiteren Behauptungen.

(8.5) Satz:

Es sei $n = 2$ und $J = \{1, \ldots, m\}$.

Dann existieren im Wald'schen Fall und im Random Walk Fall m abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots, I_m$ in $[0,1]$, so daß gilt:

$A = \{\pi = (\pi_1, (1-\pi_1)) \in \Pi : \pi_1 \in I_1 \cup \ldots \cup I_m\}$.

Eine optimale Stopzeit von $(X_\pi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. P_π ist dann gegeben durch: $T(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N}: \pi_1^{(k)} \in I_1 \cup \ldots \cup I_m\}$.

(Die Intervalle können zu einem Punkt ausgeartet oder leer sein. Zwei Intervalle haben höchstens einen Randpunkt gemeinsam).

Beweis:

Nach Satz (7.9) ist in beiden Fällen $v_\infty^*(\pi)$ stetig und konkav. Jedes $\pi \in \Pi$ schreibt sich als $\pi = (\pi_1, 1-\pi_1)$. Wir setzen:

$v(\pi_1) := v(\pi_1, 1-\pi_1)$ und $v_\infty^*(\pi_1) := v_\infty^*(\pi_1, 1-\pi_1)$,

$(0 \leq \pi_1 \leq 1)$. Dann sind auch v und v_∞^* stetige und konkave Funktionen. Alle weiteren Aussagen des obigen Satzes sind dann nur triviale Übertragungen der Aussagen von Satz (8.4).

IX) Bedingter Sequenztest mit unabhängigen Wiederholungen.

In diesem letzten Kapitel wollen wir ein weiteres Beispiel eines sequentiellen Testproblems mit vollständigen Bindungen behandeln. Der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber behandeln wir nur unabhängige Wiederholungen, es ist selbstverständlich möglich, bedingte Sequenztests mit anderen stochastischen Prozessen zu untersuchen.

Voraussetzungen:

Es sei $\nu | \mathfrak{Z}_1$ ein σ-finites Maß auf $\mathfrak{Z}_1$ mit $\nu(\{0\}) = 0$.

ε_o sei das Punktmaß im Punkte $o \in \mathbb{R}$. Es seien Dichten $f_1, \ldots, f_n$ über $(\mathbb{R}, \mathfrak{Z}_1)$ bzgl. ν gegeben mit $f_i(0) = 0$, $i=1,\ldots,n$. Es sei $1 \in \mathbb{N}$, $Z \subset \mathbb{R}^1$, $z_o \in Z$ und $U:(Z\times\mathbb{R}, \mathfrak{Z}(Z\times\mathbb{R})) \longrightarrow (Z, \mathfrak{Z}(Z))$ eine Übergangsfunktion.
Weiter sei $A \in \mathfrak{Z}(Z)$ und die Übergangsfunktion $U_A: Z\times\mathbb{R} \longrightarrow Z$ sei definiert durch:

$$U_A(z,y) := U(z,y)\, 1_A(z) + z(1-1_A)(z), \quad z \in Z, \quad y \in \mathbb{R}.$$

U_A ist $\mathfrak{Z}(Z\times\mathbb{R})$-$\mathfrak{Z}(Z)$-meßbar.
Der stochastische Prozeß $z_k: (\Omega, \bar{\mathfrak{R}}_k) \longrightarrow (Z, \mathfrak{Z}(Z))$ sei definiert durch: $z_k(\omega) := U_A(z_{k-1}(\omega), y_k)$, $k \in \mathbb{N}$.
$\omega = (y_1, y_2, \ldots) \in \Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Dann ist $\tau(\omega) := \inf\{k \in \mathbb{N}: z_k(\omega) \notin A\}$ eine Stopzeit der Familie $(\bar{\mathfrak{R}}_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Weiter sei $\delta: \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$, $\delta(y) := 1_{\{0\}}(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden $z' := 1_A(z)$, $z \in Z$.

(9.1) Definition:

Ein sequentielles Testproblem mit vollst. Bindungen $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ($\{P_i\}_{i=1,\ldots,n}$; $\{\mathfrak{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$; $\{C_k + a_j : j \in J\}_{k \in \mathbb{N}}$) heißt 'bedingter Sequenztest mit unabhängigen Wiederholungen', wenn folgendes gilt:

Sei $\mu := \nu + \varepsilon_o$. Sei $f_i^{(k)}$ die Dichte von $P_i | \mathfrak{A}_k$ bzgl. μ^k; dann gelte:

$$\frac{f_i^{(k+1)}(\omega)}{f_i^{(k)}(\omega)} = f_i(y_{k+1})\, z_k'(\omega) + \delta(y_{k+1})(1 - z_k'(\omega)),$$

($\omega = (y_1, y_2, \ldots) \in \Omega$), $i=1,\ldots,n$; $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $f_i^{(0)} := 1$.
(Wir haben der Einfachheit halber $k_o = 0$ und $\alpha = 1$ gesetzt).

Interpretation:

Sei ξ eine reelle Zufallsvariable mit ν-Dichte $f_i(y)$, $i=1,\ldots,n$. Dann wird ξ so lange wiederholt, bis $z_k \notin A$ eintritt. Danach findet keine weitere Beobachtung mehr statt.

Dies sieht man folgendermaßen:

Sei $\omega \in \Omega$ mit $z_o \in A$, $z_1(\omega) \in A$, . . . , $z_k(\omega) \in A$; dann gilt:

$f_i^{(k+1)}(\omega) = f_i(y_1) \ldots f_i(y_k) f_i(y_{k+1})$, $\omega = (y_1, y_2, \ldots)$, $i=1,\ldots,n$.

Wir beobachten also mindestens $k+1$ unabhängige Wiederholungen von ξ. Gilt nun weiter $z_{k+1}(\omega) \notin A$, so folgt:

$f_i^{(k+2)}(\omega) = f_i^{(k+1)}(\omega)\, \delta(y_{k+2})$ und mithin $P_{pr_{k+2}}(\cdot | \mathfrak{A}_{k+1}) = \varepsilon_o$.

Es tritt also das sichere Ereignis $0 = \text{const}$ ein und somit wird keine weitere Information über die Verteilung von ξ gewonnen.

Nach Definition von U_A gilt dann für $z_{k+2}(\omega)$:
$z_{k+2}(\omega) = z_{k+1}(\omega)$ und somit auch $z_{k+2}(\omega) \notin A$. Mithin gilt dann: $f_i^{(k+3)}(\omega) = f_i^{(k+1)}(\omega) \cdot \delta(y_{k+2}) \cdot \delta(y_{k+3})$ usw.

Für alle weiteren Zeiten $j > k+1$ tritt also keine weitere Beobachtung von ξ mehr ein.

Durch (9.1) ist also ein statistisches Experiment beschrieben, bei dem eine weitere unabhängige Wiederholung des Versuchs nur unter der Bedingung gemacht werden kann, daß ein bestimmter Parameter $z_k(\omega)$ nicht aus einer gewissen Menge A austritt.

Beispiel:

Ein Statistiker beobachtet den Gewinn (bzw. Verlust) eines Spielers S. Es sei ξ_k der Gewinn (bzw. Verlust) des Spielers beim k-ten Spiel. Wir nehmen an, daß $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängige Wiederholungen einer Zufallsvariablen ξ sind. Der Statistiker will die Verteilung von ξ ermitteln, indem er die sukzessiven Gewinne von S beobachtet.
Nun unterliege der Spieler S aber der Bedingung, daß er nur so lange mitspielen darf, solange er über Kapital verfügt.
Sei also z_o das Anfangskapital von S. Setzt man nun: $U(z,y) := z + y$, dann ist z_k das Kapital des Spielers S zum Zeitpunkt k und $A := (0, \infty)$.
Der Statistiker kann dann nur solange Informationen sammeln, solange $z_k > 0$ ist, solange also der Spieler S noch Kapital hat.

(9.2) Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen von (9.1) gilt nun:

I)

$$\pi_i^{(k+1)}(\omega) = \frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{l=1}^{n} \pi_l f_l^{(k+1)}(\omega)} =$$

$$= \frac{\pi_i^{(k)}(\omega)\,(f_i(y_{k+1})\,z_k'(\omega) + \delta(y_{k+1})\,(1 - z_k'(\omega)))}{\sum_{l=1}^{n} \pi_l^{(k)}(\omega)\,(f_l(y_{k+1})\,z_k'(\omega) + \delta(y_{k+1})\,(1 - z_k'(\omega)))} =$$

$$= \frac{\tilde{\pi}_i^{(k)}(\omega)\, f_i(y_{k+1})}{\sum_{l=1}^{n} \tilde{\pi}_l^{(k)}(\omega)\, f_i(y_{k+1})}\, z_k'(\omega) + \tilde{\pi}_i^{(k)}(\omega)\,\delta(y_{k+1})(1 - z_k'(\omega))$$

$(P_\pi\text{-f.s.}, \pi \in \Pi)$.

Die letzte Gleichung ist klar, falls $z'_k(\omega) = 1$.

Im Fall $z'_k(\omega) = 0$ gilt die Gleichung, weil $P_i(z'_k = 0,\ y_{k+1} \neq 0) = 0$ gilt für alle $i = 1, \ldots, n$.

II)

$$\frac{\pi_i f_i^{(k+1)}(\omega)}{\sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s^{(k)}(\omega)} = \pi_i^{(k)}(\omega)\, f_i(y_{k+1})\, z'_k(\omega) + \delta(y_{k+1})(1 - z'_k(\omega)).$$

P_π-f. s., für alle $\pi \in \Pi$. ($\omega = (y_1, y_2, \ldots)$; $= 1, \ldots, n$).

III)

Der bedingte Erwartungswertoperator Q ist gegeben durch:

$$Qh(\pi, z) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e)\, z' + \pi \cdot \delta(y)\,(1-z'),\ U(z,y)z' + z(1-z')) \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{s=1}^{n} (\pi_s f_s(y)) z' + \pi_s \delta(y)\,(1-z')) \Big)\ (\nu + \varepsilon_o)(dy) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \big(h((\pi \circ f(y))_e,\ U(z,y)z' + h(\pi, z)(1-z')) \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{s=1}^{n} (\pi_s f_s(y)\, z' + \pi_s \delta(y)\,(1-z')) \Big)\ (\nu + \varepsilon_o)(dy) =$$

$$= z' \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e,\ U(z,y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \quad \nu(dy) \quad +$$

$$+ \ (1-z') \int_{\mathbb{R}} h(\pi, z) \sum_{s=1}^{n} \pi_s \delta(y) \ \varepsilon_o(dy) \quad =$$

$$= z' \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e, U(z,y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \ \nu(dy) + (1-z')\, h(\pi, z) \ .$$

$(h \in B_+(\Pi \times Z))$.

IV) Gilt nun speziell $h(\pi, z) = h^{(1)}(\pi, z)\, z' + v(\pi)(1-z')$,
(mit $v(\pi) := \inf \{ \langle a_j, \pi \rangle : j \in J \}$), so folgt:
$Qh(\pi, z) =$

$$= z' \int_{\mathbb{R}} h^{(1)}((\pi \circ f(y))_e, U(z,y))\ 1_A(U(z,y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \ \nu(dy) +$$

$$+ \quad z' \int_{\mathbb{R}} v((\pi \circ f(y))_e)\ (1-1_A(U(z,y))) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \quad \nu(dy) \quad +$$

$$+ \quad (1-z')\ v(\pi) \ .$$

(9.3) Definitionen:

1)

$$c^*(\pi, z) := \int_{\{y \in \mathbb{R}:\ U(z,y) \notin A\}} v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \quad \nu(dy) \ .$$

c^* ist aus $B_+(\Pi \times Z)$. ($v(\pi) = \inf \{ \langle a_j, \pi \rangle : j \in J \}$).

2) $Q^*: B_+(\Pi \times Z) \longrightarrow B_+(\Pi \times Z)$ sei definiert gemäß:

$$Q^* h(\pi, z) := \int_{\{y \in \mathbb{R}:\ U(z,y) \in A\}} h((\pi \circ f(y))_e, U(z,y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \quad \nu(dy),$$

$(h \in B_+(\Pi \times Z))$.

3) Schließlich definieren wir noch den nichtlinearen Operator

$H: B_+(\Pi \times Z) \longrightarrow B_+(\Pi \times Z)$ durch:

$$Hh(\pi, z) := \min\{v(\pi),\ c(\pi, z) + c^*(\pi, z) + Q^* h(\pi, z)\},\ h \in B_+(\Pi \times Z).$$

(9.4) Satz:

1) $v_k^*(\pi, z) = (H^k v)(\pi, z)\, z' + v(\pi)(1-z'),\quad \pi \in \Pi,\ z \in Z.$

2) $v_\infty^*(\pi, z) = \lim_{k \to \infty} (H^k v)(\pi, z)\, z' + v(\pi)(1-z'),\quad \pi \in \Pi,\ z \in Z.$

3) Eine optimale Stopzeit unseres sequentiellen Testproblems ist gegeben durch: $T^* := \min(\tau, T)$, wobei

$$T := \inf\{k \in \mathbb{N}:\ v(\tau^{(k)}) = \lim_{s \to \infty} (H^s v)(\pi^{(k)}, z_k)\}.$$

Beweis:

1) $v(\pi) = v(\pi)\, z' + v(\pi)(1-z'),\quad \pi \in \Pi,\ z \in Z.$

Nach Bem. (9.2) IV) folgt dann:

$Qv(\pi, z) = (c^*(\pi, z) + Q^* v(\pi, z))\, z' + v(\pi)(1-z')$.

Mithin folgt:

$v_1^*(\pi, z) = \min(v(\pi),\ c(\pi, z) + Qv(\pi, z)) =$

$= \min(v(\pi)\, z' + v(\pi)(1-z'),\ c(\pi, z) + (c^*(\pi, z) + Q^* v(\pi, z))\, z' +$

$+ v(\pi)(1-z')) =$

$= \min\{v(\pi),\ c(\pi, z) + c^*(\pi, z) + Q^* v(\pi, z)\}\, z' + v(\pi)(1-z') =$

$= Hv(\pi, z)\, z' + v(\pi)(1-z').\quad (\pi \in \Pi,\ z \in Z).$

Also hat v_1^* die Gestalt: $v_1^*(\pi, z) = (H^1 v)(\pi, z)\, z' + v(\pi)(1-z')$, $(\pi \in \Pi,\ z \in Z)$.

Es läßt sich wiederum (9.3) IV) anwenden und die Behauptung 1) ergibt sich analog zu oben durch Induktion.

2) Beh. 2) ist eine triviale Folgerung aus 1).

3) Eine optimale Stopzeit von $(X_\tau^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ bzgl. P_τ ist gegeben durch: $T_1 := \inf\{k\in\mathbb{N}: v(\tau^{(k)}) = v_\infty^*(\tau^{(k)}, z_k)\} =$ $\inf\{k\in\mathbb{N}: v(\tau^{(k)})z_k' + v(\tau^{(k)})(1-z_k') = \lim_{s\to\infty}(H^s v)(\tau^{(k)}, z_k)\, z_k' +$ $+ v(\tau^{(k)})(1-z_k'))\} = \min(\tau, T)$.

(9.5) Satz:

Auf $Z \subset \mathbb{R}^1$ sei die folgene Relation eingeführt:

$z_1 \preccurlyeq z_2$ genau dann, wenn $\{y\in\mathbb{R}: U(z_1, y)\in A\} \subset \{y\in\mathbb{R}: U(z_2, y)\in A\}$, $(z_1, z_2 \in Z)$.

Die Übergangsfunktion $U: Z\times\mathbb{R} \longrightarrow Z$ sei 'monoton wachsend' und die Funktion $c(\tau, z)$ sei bei festem $\tau\in\Pi$ 'monoton fallend' in $z\in Z$ in dem folgenden Sinne: Für $z_1, z_2 \in Z$ mit $z_1 \preccurlyeq z_2$ gilt:

i) $U(z_1, y) \preccurlyeq U(z_2, y)$ für alle $y\in\mathbb{R}$.

ii) $c(\tau, z_2) \leq c(\tau, z_1)$ für alle $\tau\in\Pi$ (hierbei ist ' $\leq$ ' die übliche kleiner-gleich-Relation in $\mathbb{R}$).

Behauptung:

Dann ist $v_\infty^*(\tau, z)$ monoton fallend in $z\in A$ bei festem $\tau\in\Pi$, d.h. es gilt: $v_\infty^*(\tau, z_2) \leq v_\infty^*(\tau, z_1)$ für alle $\tau\in\Pi$, $z_1, z_2 \in A$ mit $z_1 \preccurlyeq z_2$.

Beweis:

Seien $z_1, z_2 \in A$, $z_1 \preccurlyeq z_2$ und $\tau\in\Pi$.

Wir zeigen durch vollst. Induktion:

(*): $v_k^*(\tau, z_2) \leq v_k^*(\tau, z_1)$ für alle $\tau\in\Pi$; für alle $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

a) Die Behauptung (*) ist richtig für k=0, da $v_0^* = v$ nicht von $z\in Z$ abhängt.

b) Sei die Behauptung (*) bewiesen für ein $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Wegen $z_1, z_2 \in A$ gilt $z_1' = z_2' = 1$; mithin:

$v_{k+1}^*(\tau, z_s) = \min\{v(\tau), c(\tau, z_s) + c^*(\tau, z_s) + Q^* v_k(\tau, z_s)\}$, s=1, 2.

Da nach Voraussetzung $c(\pi, z_2) \leq c(\pi, z_1)$ für alle $\pi \in \Pi$, ist also noch zu zeigen:

$$c^*(\pi, z_2) + Q^* v_k^*(\pi, z_2) \leq c^*(\pi, z_1) + Q^* v_k^*(\pi, z_1) \quad , \quad \pi \in \Pi \; :$$

$$Q^* v_k^*(\pi, z_2) - Q^* v_k^*(\pi, z_1) =$$

$$= \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_2, y) \in A\}} v_k^*((\pi \circ f(y))_e, U(z_2, y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy) -$$

$$- \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_1, y) \in A\}} v_k^*((\pi \circ f(y))_e, U(z_1, y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy) =$$

$$= \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_1, y) \in A\}} \left\{ v_k^*((\pi \circ f(y))_e, U(z_2, y)) - v_k^*((\pi \circ f(y))_e, U(z_1, y)) \right\} \cdot$$

$$(z_1 \preccurlyeq z_2)$$

$$\cdot \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy) +$$

$$+ \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_2, y) \in A, \; U(z_1, y) \notin A\}} v_k^*((\pi \circ f(y))_e, U(z_2, y)) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy).$$

Das erste Integral ist ≤ 0, da der Integrand nach Induktionsvoraussetzung und der Monotonie von U für alle $y \in \mathbb{R}$ ≤ 0 ist.
Wegen $v_k^* \leq v$, läßt sich das zweite Integral nach oben abschätzen, indem man v_k^* durch v ersetzt. Also:

$$Q^* v_k^*(\pi, z_2) - Q^* v_k^*(\pi, z_1) \leq$$

$$\leq 0 + \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_2, y) \in A, \; U(z_1, y) \notin A\}} v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy) =$$

$$= \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_1, y) \notin A\}} v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy) -$$

$$- \int_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_2, y) \notin A\}} v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{s=1}^{n} \pi_s f_s(y) \quad \nu(dy) =$$

$$= c^*(\pi, z_1) - c^*(\pi, z_2).$$

Damit ist Satz (9.5) bewiesen.

(9.6) Bemerkung:

Wir schreiben $z_i \nearrow \infty_{\preceq}$, falls $(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ und $\{y \in \mathbb{R}: U(z_i, y) \in A\} \nearrow \mathbb{R}$, $i \nearrow \infty$. Sei also $z_i \nearrow \infty_{\preceq}$.
Falls $c(\pi, z)$ monoton fallend in $z \in Z$ ist, existiert also
$\tilde{c} : (\Pi, \mathcal{S}(\Pi)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mit

$$\tilde{c}(\pi) := \lim_{i \to \infty} c(\pi, z_i).$$

Sei $W_{\tilde{c}} : B_+(\Pi) \longrightarrow B_+(\Pi)$ der zum Wald'schen Fall unabhängiger Wiederholungen mit Kostenglied $\tilde{c}$ gehörige Operator:

$$W_{\tilde{c}} h(\pi) := \min\left(v(\pi), \tilde{c}(\pi) + \int_{\mathbb{R}} h((\pi \circ f(y))_e) \sum_{s}^{n} \pi_s f_s(y) \; \nu(dy)\right)$$

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir den folgenden Satz:

(9.7) Satz:

Es gelte $z_i \nearrow \infty_{\preceq}$, $i \nearrow \infty$ und $U(z_i, y) \nearrow \infty_{\preceq}$, $i \nearrow \infty$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
$c(\pi, z)$ sei monoton fallend in $z \in Z$, $\tilde{c}$ wie in (9.6).

Dann gilt:

$$\lim_{i \to \infty} \lim_{s \to \infty} H^s v(\pi, z_i) = \lim_{s \to \infty} W_{\tilde{c}}^s v(\pi),$$

(d.h.: $v_\infty^*(\pi, z_i)$ konvergiert punktweise mit $i \nearrow \infty$ gegen die zum Wald'schen Fall unabhängiger Wiederholungen mit Kostenglied $\tilde{c}$ gehörige 'Stopfunktion' $v_\infty^*(\pi) = \lim_{s \to \infty} W_{\tilde{c}}^s v(\pi)$.)

Beweis:

Sei $\pi \in \Pi$ fest. $a_{i,s} := H^s v(\pi, z_i)$.

1) Man sieht leicht, daß der Operator H monoton wachsend ist, d.h.: $h_1, h_2 \in B_+(\Pi \times Z)$, $h_1(\pi, z) \leq h_2(\pi, z)$ für alle $\pi \in \Pi$, $z \in Z$, impliziert $Hh_1(\pi, z) \leq Hh_2(\pi, z)$ für alle $\pi \in \Pi$, $z \in Z$. Weiterhin gilt $Hv \leq v$, also ist $(a_{i,s})$ bei festem i monoton fallend in s.

2) Im Beweis des vorigen Satzes wurde gezeigt, daß $H^s v(\pi, z)$ bei festem $\pi \in \Pi$, $s \in \mathbb{N}$, monoton fallend in $z \in Z$ ist. Also ist $(a_{i,s})$ monoton fallend in i bei festem s.

Hieraus folgt: $\lim\limits_{i \to \infty} \lim\limits_{s \to \infty} a_{i,s} = \inf\limits_{i \in \mathbb{N}} \inf\limits_{s \in \mathbb{N}} a_{i,s} =$

$= \inf\limits_{s \in \mathbb{N}} \inf\limits_{i \in \mathbb{N}} a_{i,s}$.

Es ist also noch zu zeigen:

(*): $\lim\limits_{i \to \infty} H^s v(\pi, z_i) = W^s_{\tilde{c}} v(\pi)$, für alle $\pi \in \Pi$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir beweisen dies durch vollständige Induktion:

1) Behauptung (*) ist richtig für s=0, da v nicht von z abhängt.

2) Sei Beh. (*) bewiesen für ein $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann:

i) $c(\pi, z_i) \searrow \tilde{c}(\pi)$, $i \nearrow \infty$, nach Bem. (9.6).

ii) $c^*(\pi, z_i) \to 0$, denn $\{y \in \mathbb{R}: U(z_i, y) \notin A\} \searrow \emptyset$ und der Integrand v ist beschränkt.

iii) Nach Voraussetzung gilt $U(z_i, y) \nearrow \infty_{\leq}$, $i \nearrow \infty$, für alle $y \in \mathbb{R}$. Somit gilt:

$H^s v((\pi \circ f(y))_e, U(z_i, y)) 1_{\{u \in \mathbb{R}: U(z_i, u) \in A\}}(y) \to W^s_{\tilde{c}} v(\pi)$, $i \nearrow \infty$, für alle $y \in \mathbb{R}$ nach Induktionsvoraussetzung. Hieraus folgt:

$Q^*(H^s v)(\pi, z_i) =$

$= \int\limits_{\{y \in \mathbb{R}: U(z_i, y) \in A\}} (H^s v)((\pi \circ f(y))_e, U(z_i, y)) \sum\limits_{l=1}^{n} \pi_l f_l(y) \, \nu(dy)$

$$\xrightarrow[(i \to \infty)]{} \int_{\mathbb{R}} W^s_{\tilde{c}} v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{l=1}^{n} \pi_l f_l(y) \quad \nu(dy).$$

(nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, denn $H^s v$ ist beschränkt).

Also folgt:

$$(H^{s+1} v)(\pi, z_i) = \min (v(\pi), c(\pi, z_i) + c^*(\pi, z_i) + Q^*(H^s v)(\pi, z_i)) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(i \to \infty)]{} \min(v(\pi), \tilde{c}(\pi) + \int_{\mathbb{R}} W^s_c v((\pi \circ f(y))_e) \sum_{l=1}^{n} \pi_l f_l(y) \quad \nu(dy)$$

$$= W^{s+1}_{\tilde{c}} v(\pi), \text{ für alle } \pi \in \Pi.$$

(9.8) Bemerkung: Es sei $c(\pi, z)$ monoton fallend in z und es sei $c(\pi, z)$ bei festem $z \in Z$ konkav und stetig in $\pi \in \Pi$.

Nach Satz (7.9) ist dann $v^*_\infty(\pi, z)$ bei festem $z \in Z$ konkav und stetig in $\pi \in \Pi$.

Im Fall n=2 existieren dann Zahlen $0 \leq a_z \leq b_z \leq 1$ $(z \in Z)$, so daß die optimale Stopzeit des bedingten Sequenztests gegeben ist durch: $T(\omega) = \inf \{ k \in \mathbb{N}: \pi_1^{(k)}(\omega) \notin (a_{z(\omega)}, b_{z(\omega)}) \}$.

Aus Satz (9.5) folgt:

(a_z) ist monoton fallend in $z \in Z$ und (b_z) ist monoton wachsend in $z \in Z$.

Aus Satz (9.7) folgt: Für $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $z_i \nearrow \infty_{\leq}$ gilt: $a_{z_i} \searrow a$ und $b_{z_i} \nearrow b$, wobei a und b die Stopgrenzen für den Waldschen Fall unabhängiger Wiederholungen der Hypothesen $p_1, p_2 / \mathcal{L}_1$ mit den ν-Dichten f_1, f_2 und dem Kostenglied $\tilde{c} := \inf \{ c(\cdot, z_i): i \in \mathbb{N} \}$ (abhängig von der Folge (z_i)) sind.

Bemerkung:

In unserem Beispiel auf Seite 72 bedeutet $z_i \nearrow \infty_{\leq}$ offensichtlich, daß das Kapital des Spielers monoton wachsend gegen unendlich strebt.

Literaturverzeichnis:

1 H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie; de Gruyter 1968.

2 Y. S. Chow und H. Robbins, On optimal stopping rules; Z. f. W-Th. u. verw. Geb. 2, 33-49; 1963

3 T. Ferguson, Mathematical statistics; Acad. Press 1974.

4 P. Halmos, Measure Theory; Springer Verlag 1974.

5 M. Iosifescu, Random systems with complete connections with an arbitrary set of states; Comunicarile Acad. R. P. R. 13, 579-581; 1963.

6 M. Iosifescu und R. Theodorescu, Random processes and learning; Springer Verlag 1969.

7 K. Kuratowski, Topology; Acad. Press 1966.

8 V. Mammitzsch, Bayeslösungen bei mehrstufigen Tests; Z. f. W. Th. u. verw. Geb. 19, 123-166; 1971.

9 V. Mammitzsch und H. W. Fuchs, Zur Konstruktion optimaler Sequenztests; Z. f. W. Th, u. verw. Geb. 27, 257-262, 1973.

10 V. Mammitzsch, Sequenztests bei endlich vielen Hypothesen und kontinuierlicher Zeit; Z. f. W. Th. u. verw. Geb. 30, 217-225; 1974.

11 J. Neveu, Discrete Parameter Martingales, North - Holland 1975.

12 J. Pfanzagl und W. Pierlo, Compact systems of sets; Lecture notes in math. 16, Springer Verlag 1966.

13 H. Pruscha, Die statistische Analyse von ergodischen Ketten mit vollständigen Bindungen; Dissertation Universität München 1974.

14 R. Rhiel, Sequenztests bei Beobachtung von stochastischen Prozessen; Diplomarbeit Universität Marburg 1977.

15 H. Richter, Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen; Z. f. W. Th. u. verw. Geb. 2, 22-32; 1963.

16 A. Sirjaev, Statistical sequential analysis; American Mathematical Society Monograph 1973.

17 M. Thompson, Some aspects of optimal stopping theory; Dissertation University of Illinois, 1969. (Teile dieser Arbeit erschienen überarbeitet in Band 19 der Z. f. W. Th. u. verw. Geb. 1971).

18 A. Wald, Sequential analysis, John Wiley and Sons 1947.

Lebenslauf

Ich wurde am 17. Mai 1948 als Sohn des Kaufmanns Karl Rothenberger und seiner Ehefrau Berta, geb. Steber, in Altdorf bei Nürnberg geboren.
Von September 1954 bis Juli 1958 besuchte ich in Altdorf die Volksschule und trat anschließend in die Oberrealschule Altdorf über.
Von Januar 1960 an besuchte ich das Gymnasium in Dachau, wo ich 1967 das Abitur ablegte.
Von Oktober 1967 bis September 1968 leistete ich Wehrdienst bei der Bundeswehr.
Im Wintersemester 1968/69 begann ich das Mathematikstudium an der Universität München.
Vorlesungen hörte ich vor allem bei den Professoren Wienholtz und Richter. Meine Diplomarbeit schrieb ich bei Prof. Dr. Batt.
Meine Diplomhauptprüfung legte ich im Juni 1973 ab.
Seit Oktober 1973 arbeite ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Marburg.